Компьютерные инструменты в образовании, 2017
№ 3: 38–50
УДК: 517.938
http://ipo.spb.ru/journal

ИССЛЕДОВАНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММЫ CABRI 3D: ПРИЗНАКИ МНОГОГРАННИКОВ И ПРАВИЛЬНЫЕ БИЛЬЯРДНЫЕ ТРАЕКТОРИИ

Шуман Х.[1]

[1]Педагогический университет Вайнгартена, Вайнгартен, Германия

Аннотация

Использование динамических пространственных систем геометрии (ДПСГ) открывает преподавателям, школьникам и студентам новые возможности при изучении тем, связанных с пространственными геометрическими фигурами. Программы ДПСГ являются прототипом Cabri 3D, потенциал которой полностью используется при изучении свойств многогранников. Одной из таких тем является тема бильярды в выпуклых многогранниках. Изучение специальных бильярдов в кубе и их обобщения выходят за рамки школьной программы. То же можно сказать и о теме «Вписанные пространственные многоугольники минимального периметра, используемые для определения специальных выпуклых гексаэдров». Эвристические методы поддерживают экспериментальные работы с ДПСГ. Доказательства найденных утверждений будут даны в дальнейших работах.

Ключевые слова: *пространственные выпуклые многоугольники, пространственный бильярд, Cabri 3D, динамическая пространственная система геометрии.*

Цитирование: Шуман Х. Исследования с использованием программ Cabri 3D: признаки многогранников и правильные бильярдные траектории // Компьютерные инструменты в образовании. 2017. № 3. С. 38–50.

> Бильярд в евклидовых пространствах размерности три и более фактически находится в зачаточном состоянии. Если кратко, то в общем случае практически ничего не известно.
>
> Марсель Бергер [2]

1. ВВЕДЕНИЕ

Тема данной работы относится к сложной и еще полностью не разработанной теории математического бильярда. В качестве основной литературы назовём [7] (бильярд на плоскости) и [3] (пространственный бильярд).

Представляют интерес следующие задачи: **Для каких специальных выпуклых $2n$-гранных многогранников существует бильярдная траектория, представляющая собой правильный $2n$-угольник, и, наоборот, какой $2n$-гранный многогранник может**

быть сконструирован по бильярдной траектории, представляющей собой правильный $2n$-угольник?

Эта проблема эквивалентна проблеме: **Для каких специальных выпуклых $2n$-гранных многогранников существует вписанный правильный $2n$-угольник минимального периметра, и, наоборот, какие $2n$-гранные многогранники могут быть сконструированы по заданному правильному пространственному $2n$-угольнику минимального периметра?**

При этом правильный пространственный $2n$- угольник — это многоугольник Петри n-угольной антипризмы, образованный из правильного многоугольника нижнего основания и конгруэнтного ему верхнего основания, повернутого относительно нижнего на $180°/n$ (π/n). Выпуклая боковая поверхность правильного пространственного $2n$-угольника и представляет собой n-угольную антипризму. Не существует правильных пространственных многоугольников с нечетным числом вершин.

В дальнейшем поставленные вопросы будут рассматриваться при $n = 3$. При этом бильярдные соударения с отражением будем представлять себе как соударения либо (точечных) бильярдных шаров, либо атомарных частиц, либо корпускул света на плоскости, используемой в качестве траектории. Практически везде будем избегать применения терминов из теории математического бильярда.

С помощью соответствующей системы ДПСГ, как, например, Cabri 3D [1], возможно с помощью элементарных методов геометрии исследовать свойства бильярда в простых многогранниках, таких, как куб, прямоугольный и наклонный параллелепипед. При этом в системе ДПСГ обнаружение различных утверждений о таком бильярде поддерживается с помощью визуализации, построения, измерений, а также с помощью манипуляций и изменений пространственных объектов [6]. Кроме того, используемые эвристические методы усиливаются системами ДПСГ (см. [8]):

- использование аналогий (особенно при переходе от геометрии на плоскости к геометрии в пространстве),
- индукция,
- реструктуризация и изменение,
- обобщение и специализация,
- анализ и синтез,
- композиция,
- обратимость.

Эта работа является примером эффективного использования системы ДПСГ при изучении стереометрии.

2. ОТ БИЛЬЯРДА В КВАДРАТЕ К БИЛЬЯРДУ В КУБЕ

Предварительные замечания:

1. Двигающаяся рука () означает возможность изменения фигуры, зависящей от положения точки.
2. Для улучшения визуального восприятия свойств фигур, виртуальное пространство представлено параллельно-проективным.
3. Плоское изображение даёт лишь небольшое впечатление от интерактивного и динамичного способа работы, а также возможностей визуализации.

2.1. Простейшие бильярдные траектории

Заданы положения S и T двух шаров и направляющая g, как на рис. 1. Как должен двигаться шар из точки S, чтобы, отразившись от g, шар попал в точку T?

Бильярдная траектория пересекает g в такой точке R, что оба отрезка траектории образуют с g равные (не тупые) углы (угол падения равен углу отражения). Точка R — точка пересечения направляющей g с прямой, соединяющей точку T и точку S', симметричную S относительно g. Эта простейшая бильярдная траектория одновременно является и кратчайшим расстоянием между точками S и T, проходящая через точку на направляющей g в соответствии с неравенством треугольника $|SPT| > |SRT|$ для любой отличной от R точки P, принадлежащей g. Все вышесказанное справедливо и для бильярдных траекторий в пространстве из S в T при отражении от плоскости e (рис. 2). Прямые RT и RS симметричны относительно перпендикуляра в точке R, принадлежащего направляющей g или плоскости e (рис. 1, 2). Это свойство может быть применено для проверки того факта, что SRT — траектория бильярда.

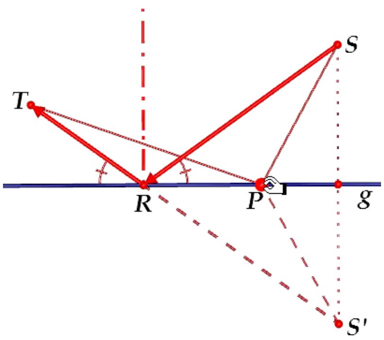

Рис. 1. Простейшая бильярдная траектория на плоскости

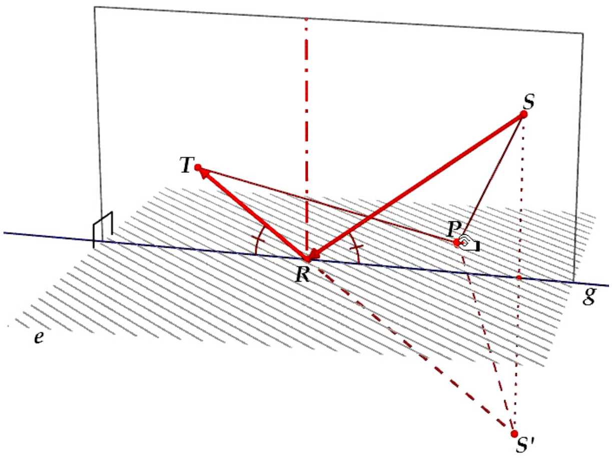

Рис. 2. Простейшая бильярдная траектория в пространстве — отражение от плоскости

2.2. От бильярдной траектории в квадрате к бильярдной траектории в кубе

Известно, что простейшей бильярдной траекторией в квадрате является прямоугольник $R_1R_2R_3R_4$, симметричный относительно центра квадрата M (рис. 3), противоположные стороны которого параллельны одной из диагоналей квадрата, а периметр равен удвоенной величине одной из диагоналей. Следовательно, бильярдные прямоугольники имеют один и тот же периметр. Угол между соседними сторонами прямоугольника равен углу между диагоналями квадрата.

Самый простой способ построения бильярдного прямоугольника состоит в следующем. На одной из сторон квадрата выбираем произвольную точку R_1, отличную от вершины квадрата. Через эту точку проводим прямую, параллельную одной из диагоналей квадрата и пересекающую его соседнюю сторону в точке R_2. Через эту точку проводим параллельную ко второй диагонали квадрата, пересекающей следующую его сторону в точке R_3. Отразив ломаную $R_1R_2R_3$ относительно центра квадрата M, получим бильярдный прямоугольник $R_1R_2R_3R_4$.

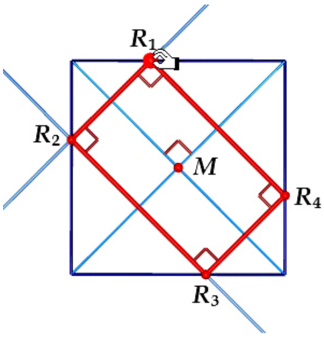

Рис. 3. Бильярдный четырехугольник в квадрате

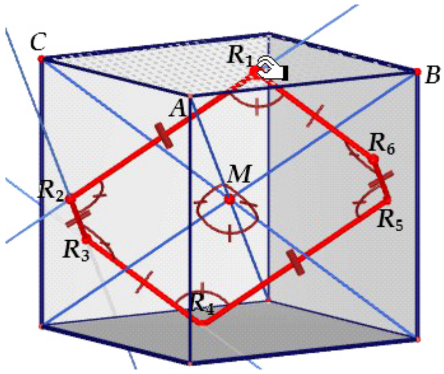

Рис. 4. Пространственный бильярдный шестиугольник в кубе

Подобно предыдущему строится бильярдная траектория в кубе. На одной из граней куба выберем произвольным образом точку R_1 (рис. 4) и проводим через нее прямую, параллельную к пространственной диагонали куба, выходящей из вершины B. Эта прямая пересекает одну из граней куба в точке R_2. Через эту точку проводим прямую, параллельную диагонали куба, выходящей из вершины A, которая пересекает следующую боковую грань куба в точке R_3. Параллельная прямая к диагонали куба, выходящей из вершины C, и проходящая через R_3, пересекает еще одну боковую грань в точке R_4. Отобразив ломаную $R_1R_2R_3R_4$ относительно центра куба M, получим пространственную бильярдную траекторию $R_1R_2R_3R_4R_5R_6$.

Примечание: Описанный выше процесс построения имеет место, если начальная точка R_1 расположена внутри треугольника ABC (рис. 5, заштрихованная часть). Если начальная точка R_1 расположена на диагонали BC, то шестиугольник сжимается до параллелограмма. Если точка R_1 расположена внутри другого прямоугольного треугольника, который вместе с треугольником ABC образует грань куба, то описанное выше построение невозможно. В этом случае для построения необходимо использовать четвертую диагональ куба. Если точку R_1 отобразить симметрично относительно BC, то получим бильярдный шестиугольник, симметрично расположенный относительно плоскости куба проходящей через BC. Бильярдные шестиугольники с другими начальными точками, находящимися внутри прямоугольных треугольников, делящих грани куба пополам, расположены плоско или центрально симметрично к начальным точкам треугольника ABC.

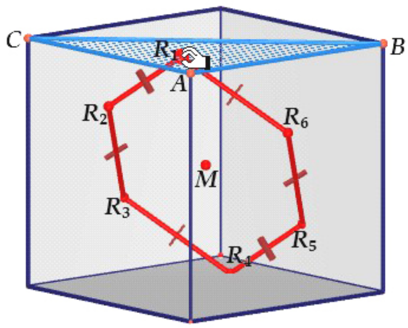

Рис. 5. Центрально-симметричный бильярдный шестиугольник со стартовой областью

Вывод:

> Периметр бильярдного шестиугольника — это периметр пространственного шестиугольника симметричного относительно центра куба. Он равен удвоенной длине диагонали куба. У этого шестиугольника все внутренние углы равны тупому углу между диагоналями куба. Таким образом, бильярдный шестиугольник это шестиугольник с равными внутренними углами, величина которых не меняется при изменении его формы.

2.3. Специальные виды бильярдного шестиугольника

Специальные виды бильярдного шестиугольника получим, если точка R_1 расположена, например, на медиане BM_b (рис. 6) или на других медианах треугольника ABC. В этом случае шестиугольник состоит из двух пар диаметрально противоположных соседних сторон, имеющих одинаковую длину. Если точка R_1 совпадает с серединой стороны квадрата, являющейся одновременно и ее центром тяжести, то бильярдная траекторая — также квадрат (рис. 7). Если точка R_1 совпадает с центром тяжести треугольника ABC, (рис. 8), то в этом случае пространственный бильярд — равносторонний шестиугольник.

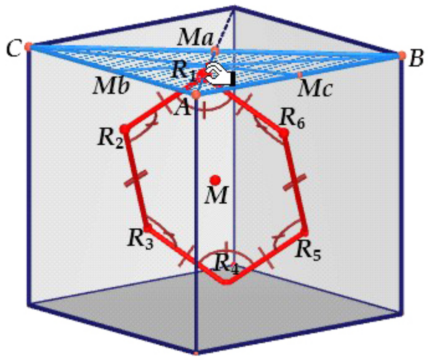

Рис. 6. Специальная форма бильярдного шестиугольника

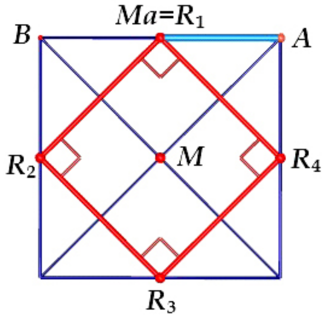

Рис. 7. Равносторонний бильярдный прямоугольник

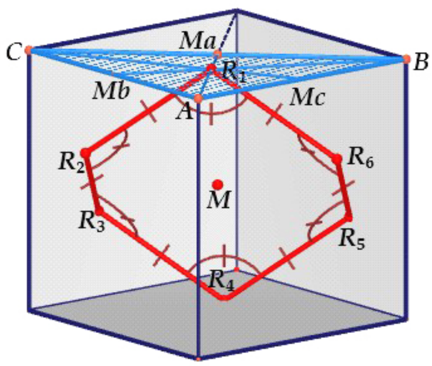

Рис. 8. Равносторонний бильярдный шестиугольник

Примечание: У Гарднера [4] выше описанное геометрическое свойство начальной точки R_1 не рассмотрено.

2.4. Первое обобщение: бильярдный шестиугольник в равногранном параллелепипеде

Куб можно изменить следующим образом: путем преобразований получить новые фигуры, сохранив при этом либо его прямые углы, либо равенство всех рёбер, либо конгруэнтность его шести граней. Одной из таких фигур является прямоугольный параллелепипед, а также параллелепипед с равными ребрами, боковые грани которого — ромбы, и, как особый случай, ромбы являются его гранями, то есть равногранный параллелепипед. Мы ограничим наши исследования бильярдом в равногранном параллелепипеде.

Примечание: При обобщении на бильярд в прямоугольном и равногранном параллелепипедах возникают проблемы, связанные с формой и параметрами, определенными этой формой. Это означает, что мы можем получить еще больше знаний о бильярде с помощью тех же средств. Тем самым становятся ясными пределы индуктивного метода.

Бильярдная траектория в равногранном параллелепипеде: Бильярдная траектория в ромбе — самопересекающийся четырёхугольник, симметричный относительно одной из диагоналей ромба (рис. 9). Эта траектория соответствует в равногранном параллелепипеде с острым углом в грани α шестиугольной траектории со следующими свойствами (рис. 10). Углы при вершинах R_2, R_3, R_4 и R_5 равны, а также равны углы и при вершинах R_1 и R_6. Стороны R_1R_2 и R_4R_5 равны. Аналогично ромбу в равногранном параллелепипеде при симметрии относительно его диагонали (рис. 11) получим самопересекающийся центрально-симметричный бильярдный шестиугольник (рис. 12). У этого шестиугольника стороны R_1R_6, R_6R_5, R_2R_3 и R_3R_4 равны, но его периметр не минимален. Для угла ромба $\alpha = 90°$ не существует бильярдной траектории, получаемой отражением от противоположных граней.

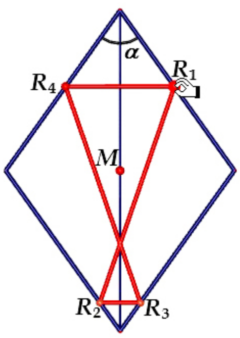

Рис. 9. Бильярдная траектория в ромбе

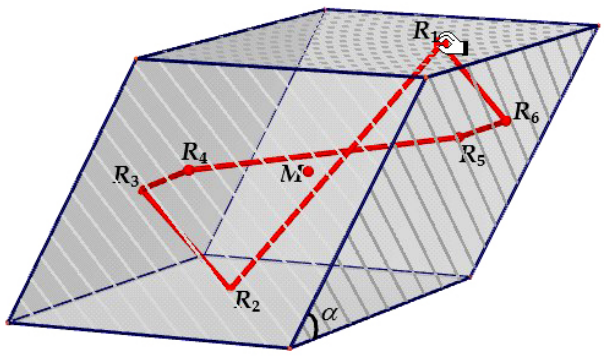

Рис. 10. Бильярдная траектория в равногранном параллелепипеде

В отличие от ромба существуют бильярдные траектории, как например, у куба, получаемые последовательным отображением от граней равногранного параллелепипеда. Существуют также шестиугольные бильярдные траектории, симметричные диагональному сечению параллелепипеда, при этом точка R_1 расположена на соответствующей диагональной плоскости (рис. 13). Так как в ромбе все бильярдные четырехугольники равноугольные, но не существует равностороннего бильярдного четырехугольника, возникает вопрос о существовании равноугольного и равностороннего бильярдного шестиугольника в равногранном параллелепипеде. Как особый случай плоско-симметричной

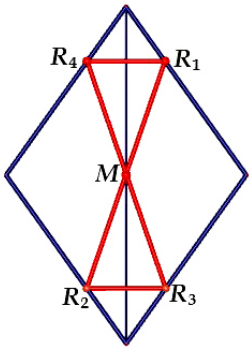

Рис. 11. Центральносимметричный бильярдный четырехугольник в ромбе

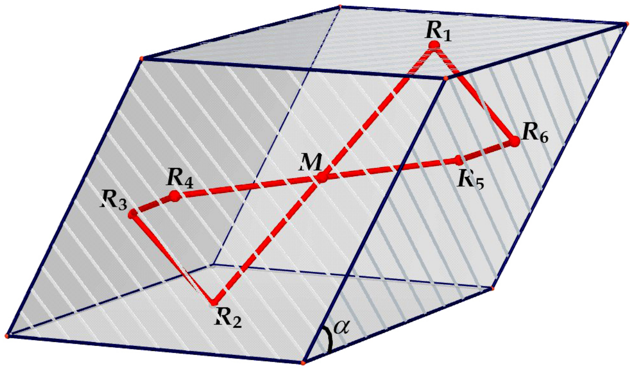

Рис. 12. Центрально симметричный бильярдный шестиугольник в равногранном параллелепипеде

бильярдной траектории можно назвать бильярдный шестиугольник в равногранном параллелепипеде, симметричный относительно его центра M, являющийся одновременно равноугольным и равносторонним (рис. 14). Этот бильярдный шестиугольник среди всех бильярдных шестиугольников равногранного параллелепипеда имеет наименьший периметр.

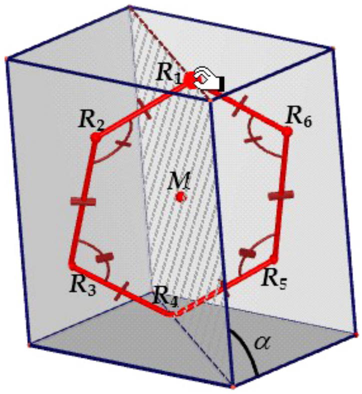

Рис. 13. Плоскосимметричный бильярдный шестиугольник в равностороннем параллелепипеде при последовательном отражении от граней

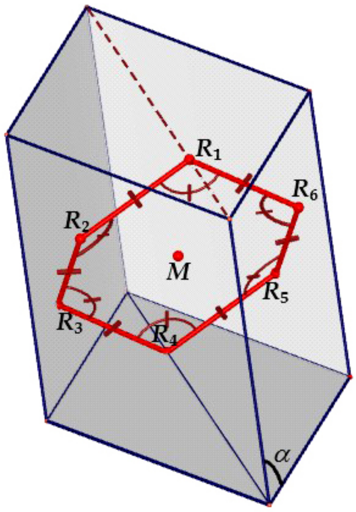

Рис. 14. Центрально симметричный и одновременно равносторонний и равноугольный бильярдный шестиугольник в равногранном параллелепипеде при последовательном отражении от граней

Примечание: Выпуклая оболочка равностороннего и равноугольного бильярдного шестиугольника в равногранном параллелепипеде, как и в кубе, представляет собой антипризму, основаниями которой являются конгруэнтные равносторонние треугольники.

2.5. От бильярдной траектории в виде равностороннего шестиугольника к равногранному параллелепипеду

До сих пор мы занимались конструированием бильярдных шестиугольников для куба и его специальных обобщений. Далее будем действовать в обратном порядке: для пространственного шестиугольника конструируем шестигранник, для которого исходный шестиугольник является бильярдной траекторией. В этом случае мы получим шестигранники, зависящие от формы бильярдного шестиугольника.

Конструкция: Правильный пространственный шестиугольник $R_1R_2R_3R_4R_5R_6$ получается из антипризмы с нижним основанием в виде равностороннего треугольника и верхним основанием, полученным из нижнего поворотом на 180° и перемещенным параллельно нижнему (рис. 15; так называемый антипризматический шестиугольник, или многоугольник Петри антипризмы). При этом симметричные свойства антипризмы переносятся на шестиугольник. Для внутренних углов такого шестиугольника построены биссектрисы (рис. 16).

В вершинах R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 и R_6 биссектрис строим перпендикулярные плоскости к этим биссектрисам (рис. 17; перпендикулярные плоскости к R_1, R_3 и R_5 и их точке пересе-

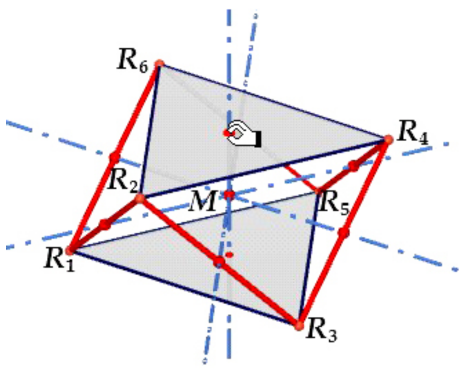

Рис. 15. Треугольная антипризма с правильным шестиугольником, симметричными осями и центром

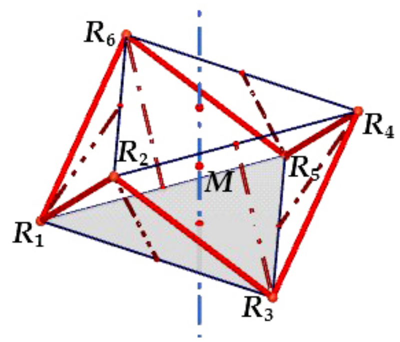

Рис. 16. Правильный шестиугольник с биссектрисами

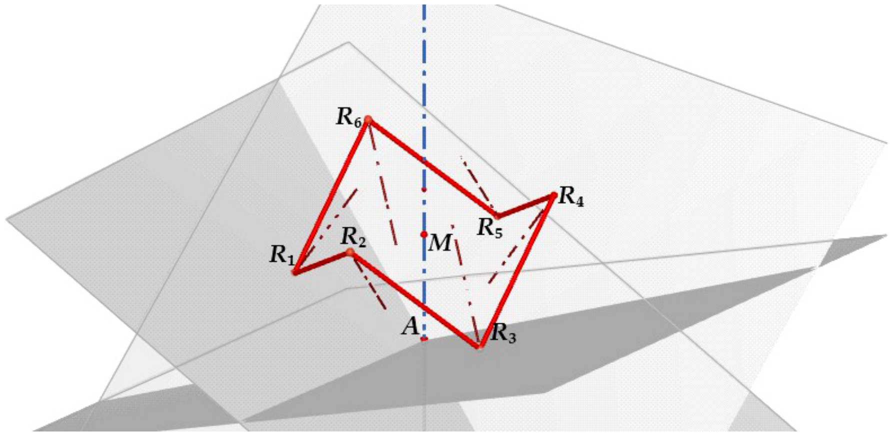

Рис. 17. Пересечение трех перпендикулярных плоскостей трех биссектрис правильного шестиугольника

чения A). Каждые три из не параллельных между собой перпендикулярных плоскостей, пересекаются в одной точке — вершине трехгранного угла (рис. 18). Оси симметрии антипризматического шестиугольника совпадают с соответствующими осями симметрии равногранного параллелепипеда, а центр симметрии шестиугольника совпадает с центром симметрии параллелограмма. Развертка параллелепипеда подтверждает, что все его грани равны (рис. 19). Мы пришли к заключению

Каждому правильному пространственному шестиугольнику $R_1R_2R_3R_4R_5R_6$ ставится в соответствие равногранный параллелепипед $ABCDEFGH$, для которого вышеуказанный шестиугольник $R_1R_2R_3R_4R_5R_6$ является бильярдной траекторией.

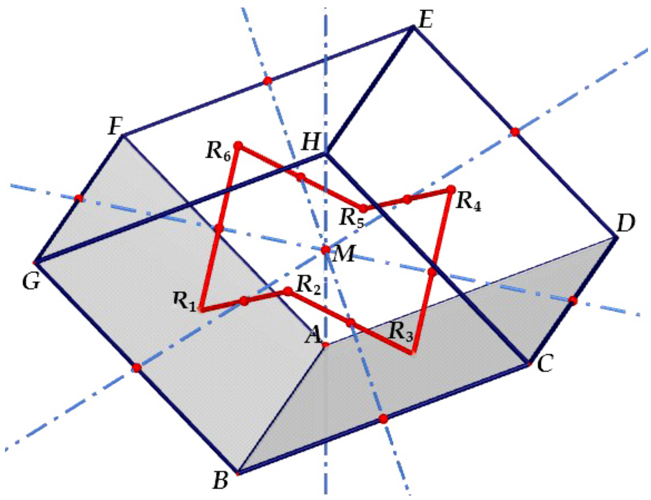

Рис. 18. Равногранный параллелепипед с траекторией в виде правильного шестиугольника

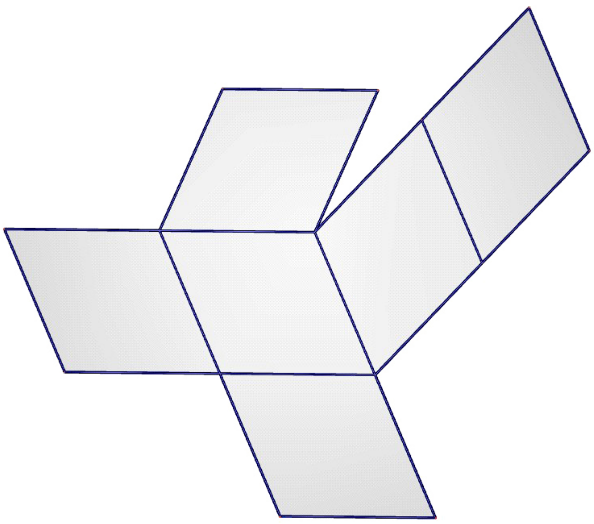

Рис. 19. Развертка равногранного параллелепипеда

Примечания:

1. Кроме антипризматических правильных шестиугольников не существует других замкнутых пространственных правильных шестиугольников.
2. Если величина внутреннего угла правильного шестиугольника равна $180° - 2\,\mathrm{arctg}(\sqrt{2}/2)$, то тогда равногранный параллелепипед — куб.

Из предыдущего раздела (рис. 14), мы почерпнули не только то, что бильярдная траектория равногранного параллелепипеда правильный шестиугольник, но и основные характеристики того, что параллелепипед равногранный.

Шестигранник тогда и только тогда равногранный параллелепипед, когда его замкнутая бильярдная траектория — правильный шестиугольник.

или:

Шестигранник тогда и только тогда равногранный параллелепипед, когда он содержит вписанный правильный пространственный шестиугольник минимального периметра.

Примечание: Возможно аналогично провести исследования для простых замкнутых правильных бильярдных траекторий с 8, 10, 12, ... углами, представляющих собой трапецоиды, состоящие из определенного числа конгруэнтных ромбоидов. Для правильных бильярдных четырёхугольников получаем тетраэдр, состоящий из конгруэнтных треугольников, среди которых, как исключение, правильный тетраэдр.

Вывод: Среди (замкнутых) правильных шестиугольников имеются самопересекающиеся правильные шестиугольники, которые легко можно построить для правильных треугольных призм (рис. 20).

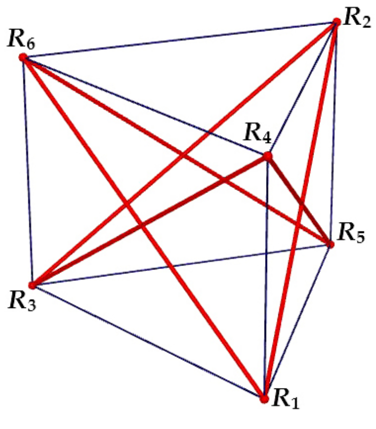

Рис. 20. Самопересекающийся правильный пространственный шестиугольник

Если в вершинах правильного самопересекающегося шестиугольника построить плоскости, перпендикулярные биссектрисам его внутренних углов, то получим боковую поверхность двойной треугольной пирамиды. (рис. 21). Исключение — двойная треугольная пирамида с правильными треугольниками.

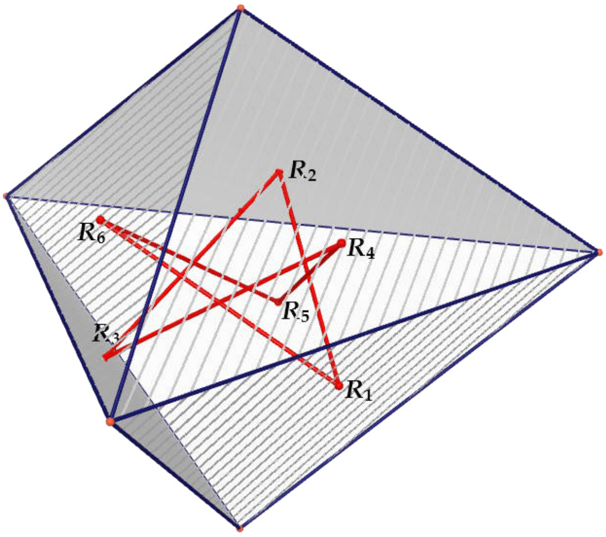

Рис. 21. Двойная треугольная пирамида с траекторией в виде правильного самопересекающегося пространственного шестиугольника

Заключительное утверждение:

> **Шестигранник тогда и только тогда представляет собой двойную шестиугольную пирамиду с гранями в виде равнобедренных треугольников, когда для него существует простая замкнутая бильярдная траектория в виде правильного самопересекающегося шестиугольника.**

или:

> **Шестигранник тогда и только тогда представляет собой двойную шестиугольную пирамиду с гранями в виде равнобедренных треугольников, когда для него существует правильный вписанный самопересекающийся шестиугольник минимального периметра.**

Примечание: Можно провести исследования для самопересекающихся правильных бильярдных траекторий с 10, 14, 18, ... вершинами, получая при этом трапецоиды с соответствующим числом конгруэнтных ромбоидов.

Мы заканчиваем наше исследование **признаками параллелепипеда**.

В качестве бильярдной траектории в параллелепипеде получаем (замкнутые) центрально симметричные шестиугольники. Обратно: если в вершинах такого шестиугольника построить плоскости, перпендикулярные биссектрисам его внутренних углов, то эти плоскости, пересекаясь, образуют боковую поверхность параллелепипеда (рис. 22). Мы получили, что:

> **Шестигранник тогда и только тогда параллелепипед, когда его бильярдная траектория — центрально симметричный шестиугольник.**

или:

Шестигранник тогда и только тогда параллелепипед, когда его сечение — вписанный центрально симметричный шестиугольник наименьшего периметра.

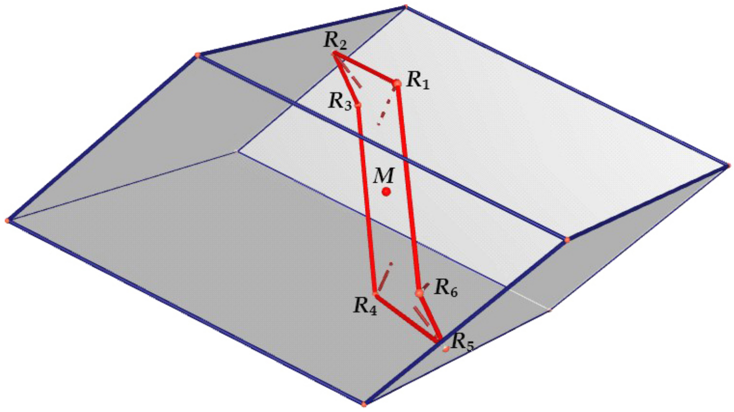

Рис. 22. Параллелепипед с бильярдной траекторией в виде центрально симметричного пространственного шестиугольника

Примечание: Так как каждый пространственный шестиугольник с попарно параллельными сторонами одновременно и центрально симметричный, то два предыдущих утверждения могут быть усилены.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вышеизложенные исследования бильярдных траекторий применимы и к другим выпуклым многогранникам, таким как тела Платона [5], тела Архимеда или более общие тела Джонсона (выпуклые многогранники, боковые грани которых — правильные многоугольники), или двойственные телам Архимеда (тела Каталана). Чем больше граней у многогранника, тем сложнее построить соответствующую бильярдную траекторию. Не всегда исследование приводит к успеху. Для специальных пространственных многоугольников также можно построить выпуклые многогранники, боковая поверхность которых состоит из выпуклых многоугольников, плоскости которых перпендикулярны биссектрисам основания и проходят через их вершины.

Рисунки созданы автором с помощью программы Cabri 3D Версия 2.1.1.

Список литературы

1. *Bainville E., Laborde J.-M.* Cabri 3D 2.1. Grenoble: Cabrilog (www.cabri.com) (дата обращения: 12.05.17).
2. *Berger M.* Geometry Revealed. A Jacob’s Ladder to Modern Higher Geometry. Heidelberg: Springer, 2010.
3. *Гальперин Г.А., Земляков А.Н.* Математические бильярды. М.: Наука, 1990.
4. *Gardner M.* Martin Gardener’s Sixth book of Mathematical Games from Scientific American. San Francisco: W.H. Freeman, 1971.
5. *Hudelson M.* (ohne Angabe): Periodic Omnihedral Billiards in Regular Polyhedra and Polytopes. http://stanwagon.com/public/hudelsonbilliards.pdf (дата обращения: 12.05.17).

6. *Schumann H.* Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum. Hildesheim: Verlag Franzbecker, 2007.
7. *Tabachnikov S.* Geometrie und Billard. Berlin u. Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.
8. *Winter H.* Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Braunschweig: Verlag Vieweg, 1989.
9. Links: https://en.wikipedia.org/wiki/Discovery_learning (дата обращения: 12.05.17).
10. http://mathworld.wolfram.com/Billiards.html (дата обращения: 12.05.17).

Поступила в редакцию 14.03.2017, окончательный вариант — 01.06.17.2017.

Computer tools in education, 2017
№ 3: 38–50
http://ipo.spb.ru/journal

RESEARCH BASED ON CABRI 3D SOFTWARE: POLYHEDRA FEATURES AND REGULAR BILLIARD TRAJECTORIES

Schumann H. [1]

[1]University of Education Weingarten, Weingarten, Germany

Abstract

The usage of dynamic spatial geometry systems (DSGS) opens new opportunities for teachers, schoolchildren and students in studying topics related to spatial geometric figures. The DSGS programs, are prototypes of Cabri 3D, whose potential is fully used in studying the properties of polyhedra. One of these topics is the billiards in convex polyhedra. The study of special billiards in the cube and its generalizations are not included in the school program. The same can be said about inscribed spatial polygons of minimal perimeter that are used to define special convex hexahedra. Heuristic methods support experimental work with DSGS. Proofs of discovered assertions will be given in subsequent papers.

Keywords: *spacial convex polygons, spcial billards, Cabri 3D, dynamic spatial geometry systems.*

Citation: H. Schumann, "Issledovaniya s ispol'zovaniem programm Cabri 3D: priznaki mnogogrannikov i pravil'nye bil'yardnye traektorii" [Research Based on Cabri 3D Software: Polyhedra Features and Regular Billiard Trajectories], *Computer tools in education*, no. 3. pp. 38–50, 2017 (in Russian).

Received 14.03.2017, the final version — 01.06.17.2017.

Heinz Schumann, Prof., University of Education Weingarten, Kirchplatz 2 D-88250 Weingarten, schumann@ph-weingarten.de

**Хайнц Шуман,
профессор, факультет математики и информатики педагогического университета Вайнгартена, Германия;
Kirchplatz 2 D-88250 Weingarten,
schumann@ph-weingarten.de**