Компьютерные инструменты в образовании, 2017
№ 1: 38–44
УДК: 53.072
http://ipo.spb.ru/journal

# КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ САМООРГАНИЗАЦИИ. АНАЛОГИЯ С ЯЧЕЙКАМИ БЕНАРА

Денисевич А.А.[1], Ляпцев А.В.[1]
[1] РГПУ им. А.И.Герцена, Санкт-Петербрг, Россия

**Аннотация**
Рассматривается модель, основанная на классическом движении частицы в области, ограниченной стенками, с которыми частица может обмениваться энергией при столкновениях, теряя или приобретая энергию в зависимости от температуры стенки. Как показывает моделирование, при наличии градиента температуры в такой модели возможны процессы типа процессов самоорганизации, так что траектория движения частицы в фазовом пространстве с течением времени стремится к некоторым простейшим циклическим аттракторам. Математическая простота модели позволяет использовать её в процессе обучения, поскольку требует от обучаемых минимальных навыков программирования.

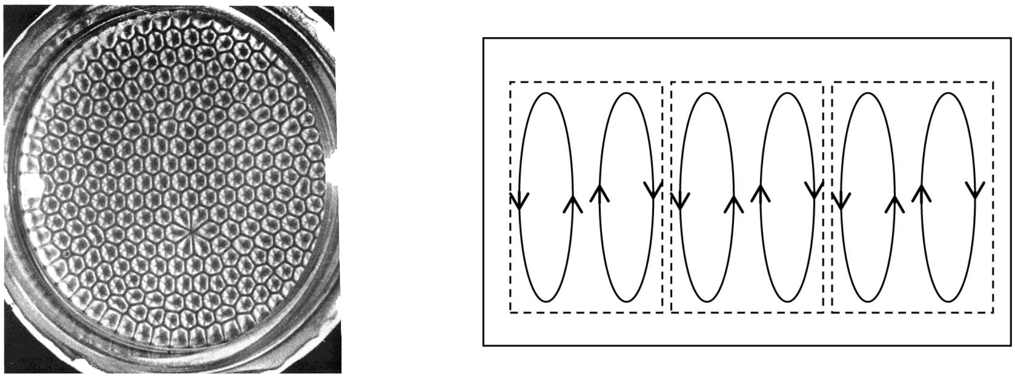
**Ключевые слова:** *процессы самоорганизации, математическая модель, пространственные структуры, компьютерное моделирование.*

**Цитирование:** Денисевич А.А., Ляпцев А.В. Компьютерное моделирование процессов самоорганизации. Аналогия с ячейками Бенара // Компьютерные инструменты в образовании. 2017. № 1. С. 38–44.

Изучение процессов самоорганизации — процессов образования упорядоченных временных и пространственных структур, составляющих суть междисциплинарного научного направления синергетики, в настоящее время входит в вузовские программы различных направлений. Интерес к таким процессам обусловлен универсальным характером математических моделей, описывающих подобные явления в реальных системах различной природы от «чисто физических» систем до таких сложных систем, как общество [1]. Изучение синергетики в зависимости от направления образовательной программы может происходить на различных уровнях: от изучения лишь качественных особенностей синергетики без привлечения математики (см., например, [4]) до уровня, на котором полноценно изучается математическое моделирование с привлечением компьютеров. В этом случае возникает необходимость самостоятельного решения учащимися учебных задач, связанных с моделированием процессов самоорганизации.

Сложность подобных задач состоит в том, что, как правило, подобные учебные задачи, являющиеся моделями реальных явлений, связаны с решением систем дифференциальных уравнений численными методами. Модели образования временных структур — модели автоколебаний в системах различной природы могут быть достаточно простыми и требуют лишь умений решать системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Примером может служить модель Лотка-Вольтера, описывающая эволюцию взаимосвязанных популяций. Поскольку процедуры решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений входят в разнообразные пакеты, используемые для математического моделирования (Matlab, Mathcad, Maple), то задачи с моделированием автоколебаний вполне доступны студентам при использовании подобных математических пакетов в процессе обучения. Гораздо более сложными для изучения являются модели образования пространственных структур, что связано с необходимостью решения систем дифференциальных уравнений с частными производными и требует от учащихся гораздо больших временных затрат.

Типичным учебным примером модели образования пространственных структур является модель, описывающая ячейки Бенара. Подобные ячеистые структуры образуются при нагревании слоя жидкости при определенном перепаде температур между нижней подогреваемой поверхностью и верхней охлаждаемой поверхностью в результате образования упорядоченных конвекционных потоков (рис. 1, 2). Сложность данной задачи как некоторой учебной заключается, во-первых, в том, что для понимания модели требуются знания уравнений гидродинамики и термодинамики, и, во-вторых, необходимо решать системы уравнений с частными производными в том или ином приближении [5].



**(а)** фото **(б)** рисунок, объясняющий модель

**Рис. 1.** Ячейки Бенара

Между тем, основные положения синергетики говорят о том, что для образования структур необходимы некоторые качественные особенности систем, независящие от природы этих систем. Такими особенностями являются открытость систем (взаимодействие системы с окружением), наличие в системе необратимых диссипативных процессов (например, процессов теплопередачи) и нелинейный характер математических уравнений, описывающих эволюцию системы. Обращаясь к модели ячеек Бенара, несложно понять, что все эти особенности остаются, если жидкость в сосуде заменить на газ, а газ сделать настолько разряженным, что взаимодействием между молекулами можно пренебречь, как в модели идеального газа. В таком случае естественно возникает модель, в которой молекулы газа движутся в некоторой ограниченной области, отражаясь от стенок, имеющих различную температуру. Такая модель, несомненно, является более простой, чем гидродинамическая модель. Ниже мы изложим постановку подобной задачи и приведем результаты, отражающие особенности образования пространственных структур в такой модели.

Рассмотрим модель, в которой некоторая частица совершает движение в некоторой ограниченной области. Простейшая модель — движение частицы в одной плоскости в области, ограниченной прямоугольником (рис. 2). Считаем, что какие-либо внешние поля, в том числе и поле тяжести, отсутствуют, так что от одной стенки до другой частица движется прямолинейно и равномерно. Наличие диссипативных процессов в данном случае должно сводиться к тому, что столкновение со стенками должно быть неупругим, так чтобы частица могла получать энергию от «более тёплой» стенки и отдавать энергию «более холодной» стенке. В простейшей модели можно считать, что нижняя стенка имеет температуру $T_{max}$, верхняя — температуру $T_{min}$, а температура боковых стенок изменяется линейно в интервале от $T_{max}$ до $T_{min}$.

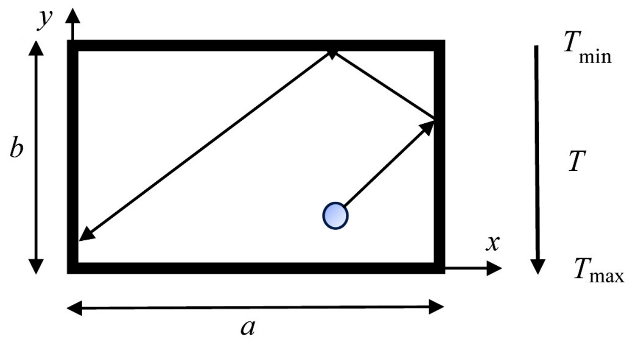



**Рис. 2.** Модель движения частицы

Естественно, что описание процесса столкновения молекулы газа с твердой поверхностью является достаточно сложным и требует использования уравнений квантовой теории. Однако качественные особенности подобного процесса можно изучить на основе классической модели твердого тела, представляющей собой некоторые частицы, связанные упругими пружинками. Налетающая на такую «стенку» частица с большой энергией может передать энергию одной из частиц стенки, а затем эта энергия посредством упругих связей может передаться другим частицам, составляющим «стенку». Для большого числа частиц в «стенке» подобная передача энергии является необратимым процессом. Возможен, однако, обратный процесс, когда энергия налетающей на «стенку» частицы мала, и при отражении от стенки частица приобретает дополнительную энергию. Такая модель полностью соответствует изучаемому уже в школьном курсе физики второму началу термодинамики с необратимым процессом теплопередачи. При этом сам процесс столкновения налетающей частицы с одной из частиц стенки может быть упругим.

Для дальнейшего развития модели рассмотрим процесс упругого столкновения двух одинаковых шаров (рис. 3).

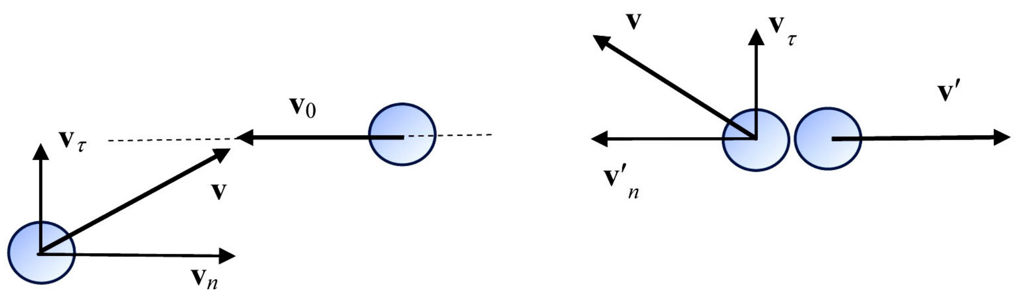



**Рис. 3.** Скорости сталкивающихся шаров до (*слева*) и после (*справа*) столкновения

Скорость левого шара представляем в виде суммы нормальной (по направлению движения правого шара) составляющей $\mathbf{v}_n$ и тангенциальной составляющей $\mathbf{v}_\tau$. Поскольку столкновение упругое, сила трения между шарами в момент столкновения отсутствует. Следовательно, тангенциальная составляющая левого шара после столкновения остается неизменной, а скорость правого шара после столкновения будет направлена вдоль оси, по которой он первоначально двигался. Векторы скоростей после столкновения элементарно находятся из законов сохранения энергии и импульса (полужирным шрифтом, как обычно, обозначены векторы, коэффициенты, связанные с массами, сокращены):

$$\begin{matrix} \mathbf{v}_n^2 + \mathbf{v}_\tau^2 + \mathbf{v}_0^2 = \mathbf{v}'^2_n + \mathbf{v}_\tau^2 + \mathbf{v}'^2_0 \\ \mathbf{v}_n + \mathbf{v}_\tau + \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}'_n + \mathbf{v}_\tau + \mathbf{v}'_0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}'_n = -\mathbf{v}_0, \quad \mathbf{v}'_0 = -\mathbf{v}'_n. \tag{1}$$

Будем теперь рассматривать правый шар как одну из частиц, составляющих стенку. Тогда средний квадрат скорости $\mathbf{v}_0$ пропорционален температуре. Исходя из этого, можно сформулировать модель, в соответствии с которой тангенциальная и нормальная составляющие скоростей изменяются по закону:

$$\mathbf{v}'_\tau = \mathbf{v}_\tau, \quad \mathbf{v}'_n = -\frac{\mathbf{v}_n}{|\mathbf{v}_n|}\sqrt{T},$$

где $T$ — температура стенки в точке столкновения. Заметим, что при очень малой температуре в случае $\mathbf{v}_\tau = 0$ налетающая на стенку частица останавливается, передавая всю энергию стенке. Такая модель близка к абсолютно неупругому столкновению частицы со стенкой. В реальности имеет место некоторая промежуточная ситуация, когда столкновение представляет собой нечто среднее между абсолютно упругим и абсолютно неупругим столкновением. Чтобы это учесть, можно несколько усложнить модель и считать, что изменение скоростей происходит по закону:

$$\mathbf{v}'_\tau = \mathbf{v}_\tau, \quad \mathbf{v}'_n = -(1-k)\mathbf{v}_n - k\frac{\mathbf{v}_n}{|\mathbf{v}_n|}\sqrt{T}. \tag{2}$$

Коэффициент $k$ изменяется в пределах от 0 до 1, так что 0 соответствует абсолютно упругому столкновению, а 1 — абсолютно неупругому столкновению.

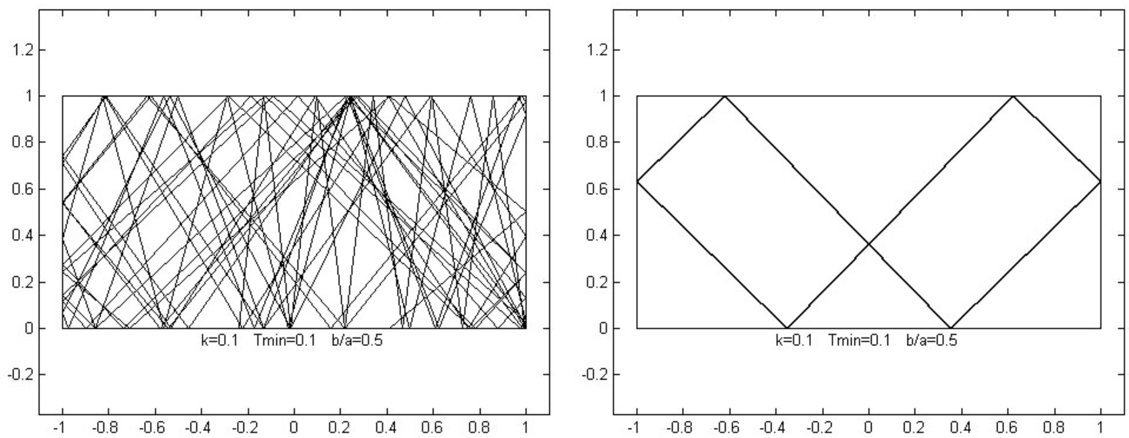
Формулы (1) практически полностью описывают предлагаемую модель, для конкретной реализации необходимо спроектировать векторные равенства на оси (см. рис. 3) и дополнить функцией, описывающей изменение температуры вдоль вертикальной стенки:

$$T(y) = T_{max} - (T_{max} - T_{min})\frac{y}{b}. \tag{3}$$

Заметим, что, поскольку температуру мы можем измерять в произвольных единицах, пропорциональных абсолютной температуре, без потери общности можно положить $T_{max} = 1$. Точно так же один из размерных параметров области движения можно положить равным единице, далее мы полагаем $a = 1$.

Формулы (1) и (2) полностью определяют движение частицы, если заданы начальные координаты и начальные составляющие скорости частицы, поскольку движение от одной стенки до другой происходит по прямой линии. Полученная модель достаточно проста для программирования, и, с другой стороны, дает достаточно интересные результаты, изменяющиеся при варьировании трех параметров: $k, T_{min}$ и $\frac{b}{a}$. Оказывается, что после некоторого промежутка времени движение становится циклическим, то есть устанавливаются достаточно простые траектории движения [2, 3]).

На рис. 4 приведены траектории движения частицы на интервале $t \in [0, 100]$ (рис. 4а) и $t \in [400, 500]$ (рис. 4б). Как видно из результата, на протяжении достаточно небольшого временного интервала траектория движения выходит на некоторый простой «аттрактор», движение в определенном смысле устанавливается подобно тому, как это происходит при малых вынужденных колебаниях. Сами аттракторы изменяются при изменении параметров модели. Некоторые несимметричные аттракторы (в проекции на плоскость координат) приведены на рисунках 5 и 6. Заметим, что в этом случае, в зависимости от начального состояния, система может выходить на аттракторы, симметричные приведенным по отношению к отражению в вертикальной плоскости. Приведенные рисунки не исчерпывают разнообразия получаемых при моделировании аттракторов, мы предлагаем читателям самим убедиться в этом. Отметим, что при некоторых параметрах простейшие аттракторы не устанавливаются на протяжении сколь угодно больших интервалов. Движение в этом случае становится хаотическим, а аттрактор подобен странному (хаотическому) аттрактору в известной модели Лоренца.




**(а)** $t \in [0, 100]$ **(б)** $t \in [400, 500]$

**Рис. 4**

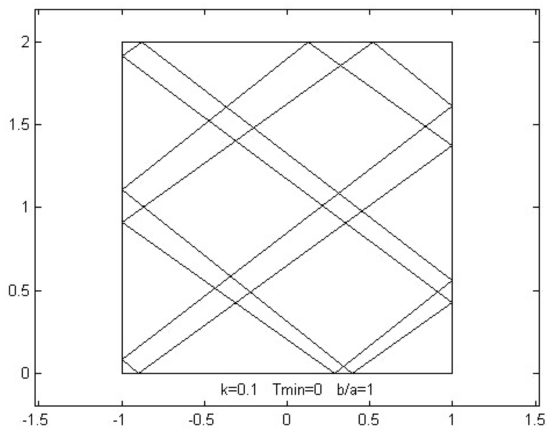



**Рис. 5**

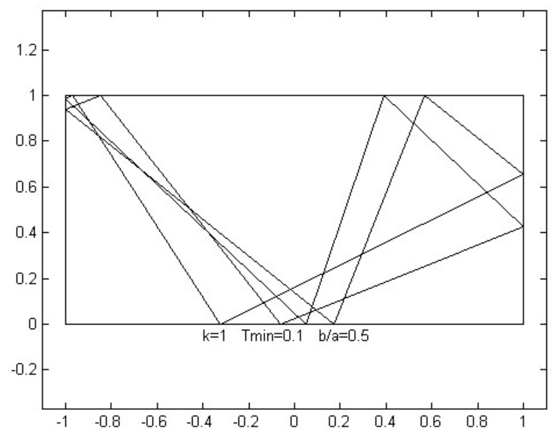



**Рис. 6**

Заметим, что сформулированная модель представляет собой аналог модели образования ячеек Бенара, повторяя некоторые качественные особенности более сложной модели. Например, при некоторых параметрах $k$ и $b/a$ и малом градиенте температуры (величина $T_{min}$ близка к единице) движение может оставаться хаотическим на протяжении сколь угодно большого времени наблюдения, а при повышении градиента температур (уменьшении значения $T_{min}$) траектория выходит на достаточно простой аттрактор. Это аналогично тому, что в конвекционной модели ячейки Бенара образуются после некоторой критической разности температур на верхней и нижней поверхностях.

## Список литературы

1. *Безрученко Б.П., Короновский А.А., Трубецков Д.И., Храмов А.Е.* Путь в синергетику: Экскурс в десяти лекциях. М.: Ленанд, 2015.
2. *Денисевич А.А., Ляпцев А.В.* Игры на «теплых бильярдах». Наглядная демонстрация понятий, характеризующих нелинейные системы: аттракторы, бифуркации, гистерезис. // Компьютерные инструменты в образовании, 2014 г. № 5. С. 42–49.
3. *Денисевич А.А., Ляпцев А.В.* Простейшая модель для демонстрации образования пространственных структур при изучении процессов самоорганизации. // Компьютерные инструменты в образовании, 2014 г. № 1. С. 36–43.
4. *Князева Е.Н., Курдюмов С.П.* Основания синергетики. Человек, конструирующий свое будущее. М.: КомКнига, 2007.
5. *Попов С.Е.* Методическая система подготовки учителя в области вычислительной физики: Монография. Нижний Тагил: НТГСПА, 2005.

*Поступила в редакцию 30.12.2016, окончательный вариант — 30.01.2017.*

---

Computer tools in education, 2017
№ 1: 38–44
http://ipo.spb.ru/journal

# COMPUTER MODELLING OF PROCESSES OF SELF-ORGANIZATION. ANALOGY TO BENAR'S CELLS

Denisevich A.A.[1], Liapzev A.V.[1]

[1]SPbSU, Saint-Petersburg, Russia

**Abstract**

The model based on the classical movement of a particle in the area limited by walls, that can exchange energy with the particle is considered. The energy of the particle can increase or decrease depending of the temperature of the wall. As shows modeling, in the presence of temperature gradient in such model this system can contain processes which are analogical to processes of self-organization. Namely the trajectory of particle in phase space tends to one of elementary cyclic attractors. Mathematical simplicity of model allows to use her in the course of training because it demands from the trained minimum skills of programming.

**Keywords:** *processes of self-organization, mathematical model, spatial structures, computational simulation.*

**Citation:** Denisevich, A. & Liapzev, A., 2017. "Komp'yuternoe modelirovanie protsessov samoorganizatsii. Analogiya s yacheikami Benara" ["Computer Modelling of Processes of SelfOrganization. Analogy to Benar's Cells"], *Computer tools in education*, no. 1, pp. 38–44.

*Received 30.12.2016, the final version — 30.01.2017.*

**Alexandra A. Denisevich, postgraduate student the Herzen State Pedagogical University of Russia, Sashamy_one@mail.ru**
**Alexander V. Liapzev, doctor of physico-mathematical Sciences, professor, head of the Department of methods of teaching physics, the Herzen State Pedagogical University of Russia; 191186, Saint-Petersburg, Moika river Embankment 48, upm_eno@mail.ru**

© Наши авторы, 2017.
Our authors, 2017.

**Денисевич Александра Алексеевна,**
**аспирант РГПУ им. А.И.Герцена,**
**Sashamy_one@mail.ru**

**Ляпцев Александр Викторович,**
**доктор физико-математических наук,**
**профессор, заведующий кафедрой**
**методики обучения физике**
**РГПУ им. А.И. Герцена;**
**191186, Санкт-Петербург,**
**набережная реки Мойки 48,**
**upm_eno@mail.ru**