Компьютерные инструменты в образовании, 2016
№ 5: 5–16
УДК: 51-77
http://ipo.spb.ru/journal

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В СОЦИОЛОГИИ И МЕТОДЫ ИХ ИССЛЕДОВАНИЯ

Козырева Д.Д.[1], Ампилова Н.Б.[1]
[1]СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

Математические методы исследования, основанные на статистике, применяются в социологии достаточно давно. С развитием теории и методов динамических систем, а также компьютерных технологий методы компьютерного моделирования становятся одним из главных инструментов исследования. Большое количество моделей, создаваемых для изучения сложных процессов, происходящих в обществе, представляют собой динамические системы или неавтономные дифференциальные или разностные уравнения с большим числом параметров. В этой ситуации важно выбрать подходящий инструмент для изучения поведения таких систем. В данной работе мы рассматриваем среду визуального моделирования RMD (RandModelDesign), созданную для работы со сложными системами, имеющую простой и удобный интерфейс и язык моделирования высокого уровня. На примерах исследованных ранее моделей социальной диффузии и социогенеза мы показываем применение пакета и обсуждаем его преимущества.

Ключевые слова: *динамические системы, компьютерное моделирование, пакет визуального моделирования RMD, социальная диффузия, социогенез.*

Цитирование: Козырева Д.Д., Ампилова Н.Б. Математические модели в социологии и методы их исследования // Компьютерные инструменты в образовании, 2016. № 5. С. 5–16 .

1. ВВЕДЕНИЕ

С развитием компьютерной техники в гуманитарных науках стали чаще применяться инструменты и подходы наук естественных. Сегодня математические методы широко используются в социологии, экономике [7, 13, 15, 16], медицине [11, 14], лингвистике [8, 10]. Делаются попытки их применения при изучении истории. В настоящее время можно выделить два основных направления применения математики: обработка больших объемов данных (обработка массивов гипотез и собранных фактов, зачастую разрозненных) и математическое моделирование. Используемые в гуманитарных науках математические модели охватывают лишь небольшую часть задач, поэтому необходимы как модели, так и инструмент, позволяющий строить и анализировать эти модели.

Математические модели давно и успешно применяются в исследовании многих социальных процессов. Хорошо известна модель Ричардсона (гонки вооружений) [12], вероятностные цепочки для описания процессов распределения ресурсов [1]. В настоящее время широко применяются гендерные системы, модели социальных групп, социальных институтов, модели поведения отдельных индивидов и межличностных взаимодействий.

Обзор литературы показывает, что для проведения вычислительных экспериментов с социологическими моделями используются различные программные средства:

1) языки программирования и среды разработки аналогичные VisualStudio;
2) среды имитационного моделирования, например, SWARM или CORMAS;
3) стандартные математические компьютерные системы, например, MATLAB или MATHEMATICA.

Наиболее широким классом математических моделей для описания процессов различной природы являются динамические системы. Поэтому и при описании процессов, изучаемых в социологии, мы тоже встречаемся с этими системами, как с дискретными, так и непрерывными. Разнообразие таких моделей велико — от линейных систем, до сложных с большим количеством параметров. Хорошо известно, что даже системы с достаточно простыми функциями, задающими правые части, могут обладать весьма сложным поведением. Пример тому логистическое отображение, отображение Хенона, рациональные преобразования плоскости. Успешное исследование поведения любой такой модели основано на сочетании как аналитических, так и численных методов и построении качественных портретов при различных сочетаниях значений параметров. В этом направлении целесообразно использовать пакеты, ориентированные на решение подобных задач.

рассмотрим некоторые известные и изученные социологические модели и покажем, как их легко исследовать в среде визуального моделирования RandModelDesign [3, 6].

2. ВЫБОР СРЕДЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

Как уже было отмечено, социологи только начинают активно моделировать сложные явления в своей области, и это удобный момент для обсуждения возможностей и сознательного выбора средств моделирования. Анализ существующих моделей показывает, что мы имеем дело со сложными математическими объектами, требующими сложных инструментов моделирования, специальных знаний, и опыта.

Наиболее освоенными социологами инструментами являются инструменты для построения «агентных» моделей — AnyLogic, Arena, SWARM, CORMAS, в которых, задавая поведение отдельных участников и правила их взаимодействия, можно наблюдать «глобальную» динамику развития сообщества. Это достаточно распространённый подход, применяемый в физике, биологии, технике, когда еще не найдены достаточно общие законы, «на которых» можно строить эффективные модели. Однако для использования сред агентного моделирования требуются специальные знания в области объектно-ориентированного программирования, и, как показывает опыт, чаще всего модели «заказываются» социологами специалистам в области моделирования. Подобные проблемы возникают и при использовании языков программирования.

Желание самому строить и исследовать нужные модели приводит к тому, что используются среды и пакеты, которые у всех на слуху, и в результате пакет выбирается практически случайно, без оценки его возможностей и приспособленности для создания и исследования определенных типов моделей. Известны случаи даже использования среды Excel. Оправданным является выбор математических пакетов, таких как Maple, Mathematica, но их стоит использовать для моделирования однокомпонентных систем, при дополнительном условии, что вычислительный эксперимент с моделями сведется к построению нескольких графиков или таблиц.

Для построения сложных, многокомпонентных моделей, предусматривающих проведения сложных вычислительных экспериментов, с выразительными визуальными образами моделируемых объектов, рекомендуется использовать среды визуального объектно-ориентированного моделирования.

Широко распространённым пакетом является пакет Simulink, но его графический язык ориентирован на технические объекты. Создавать описания социологических объектов на языке схем можно, но понимать такой язык сложно, что неминуемо будет приводить к ошибкам.

В этой статье мы покажем, как строить модели с помощью отечественной среды визуального моделирования RandModelDesigner RMD (www.mvstudium.com), представляющую собой среду для разработки компонентных моделей сложных динамических систем. RMD использует интуитивно понятный объектно-ориентированный язык моделирования высокого уровня, позволяющий быстро и качественно создавать сложные модели и проводить с ними сложные интерактивные вычислительные эксперименты.

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СОЦИАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ

Рассмотрим модель, предложенную в [4], которая может быть применена при описании социальной диффузии. Согласно [5], диффузия — распространение черт, культуры (например, религиозных убеждений, технологических идей, форм языка и т. д.) или социальной практики одного общества (группы) другому. Авторы использовали средства EXCEL для изучения поведения рассматриваемой модели.

Мы исследуем предлагаемую модель аналитически и проиллюстрируем полученные результаты с помощью RMD.

Математическую модель социальной диффузии можно записать в следующем виде:

$$x_n = k_n(N_n - x_{n-1}) + x_{n-1}, \tag{1}$$

где x_n — количество элементов на шаге n; n — порядковый номер шага; k_n — коэффициент на шаге n; N_n — размер генеральной совокупности на шаге n.
В зависимости от выбора параметров могут возникнуть разные ситуации.

3.1. Линейное разностное уравнение

В случае, когда k_n и N_n постоянные, получаем дискретную динамическую систему

$$x_n = (1-k)x_{n-1} + kN, \tag{2}$$

которая представляет собой разностное уравнение с постоянными коэффициентами. В этом случае основные характеристики системы можно получить аналитически. Прежде всего, определим неподвижные точки системы и их устойчивость. Для этого решим уравнение

$$x = (1-k)x + kN. \tag{3}$$

Тогда $x = N$ и неподвижная точка не зависит от значения параметра k.

Напомним, что графически неподвижная точка есть точка пересечения графиков $y = f(x)$ и $y = x$. В нашем случае $f(x) = (1-k)x + N$ и неподвижная точка есть точка пересечения двух прямых.

Устойчивость неподвижной точки определяется из условия $|f'(x)| < 1$, что приводит к неравенству $|1-k| < 1$, решение которого дает $0 < k < 2$. Таким образом, при $k > 2$ неподвижная точка является неустойчивой.

Поведение траекторий как в устойчивом, так и неустойчивом случае легко иллюстрируется в пакете с помощью временной диаграммы (где переменная $z2$ обозначает решение разностного уравнения) и диаграммы Ламерея (рис. 1–3).

В диаграмме Ламерея переменная Ft обозначает изменения времени, а Fx — траекторию диаграммы Ламерея, на каждой итерации в зависимости от изменения значения параметра.

Значение N было выбрано равным 100.

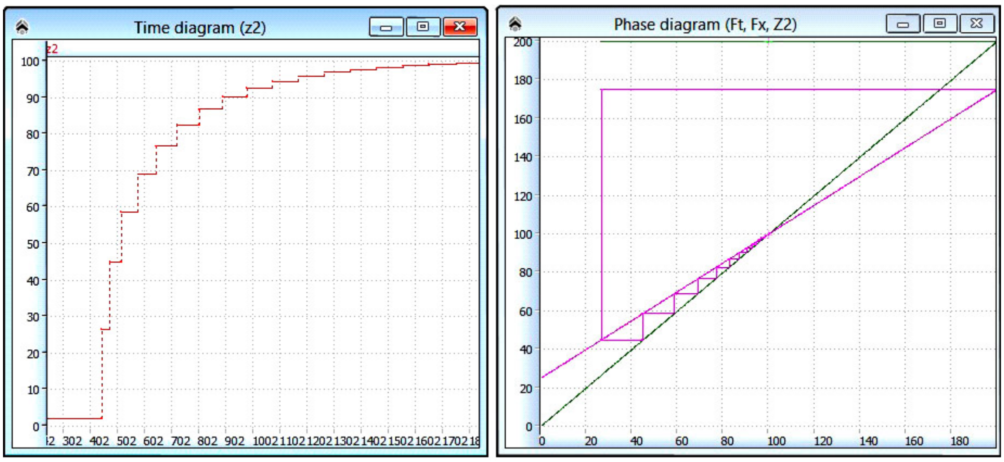

Рис. 1. Устойчивый случай. Апериодический выход на стационарное положение. $k = 0.25$ $(0 < k < 1)$

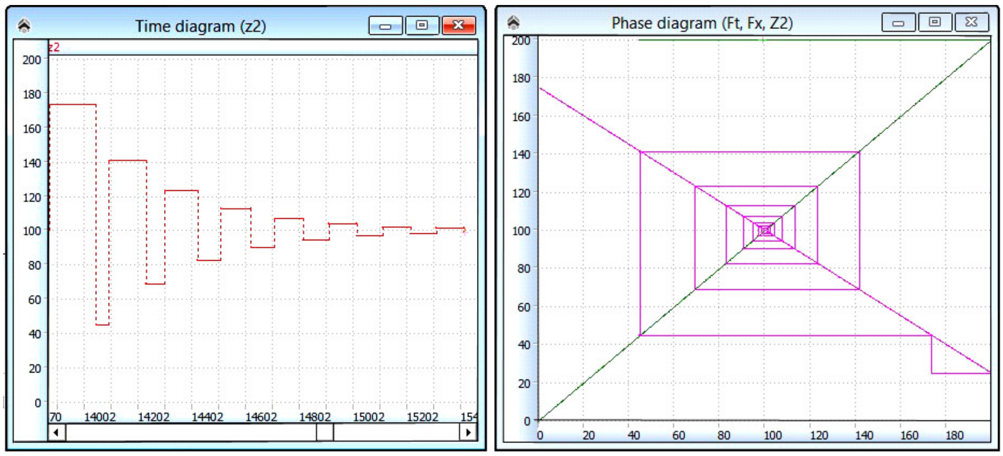

Рис. 2. Устойчивый случай. Затухающие колебания. $k = 1.75$ $(1 < k < 2)$

Полученные результаты моделирования легко проверить, так как разностное уравнение (2) с начальными данными $x_0 = x0$ имеет решение

$$x_n = N - (N - x0)(1-k)^n.$$

Рассмотрим вопрос о существовании периодических орбит. Рассмотрим случай $f^2(x) = x$

$$f(f(x)) = f(x(1-k) + kN) = (x(1-k) + kN)(1-k) + kN = x(1-k)^2 + kN(1-k) + kN.$$

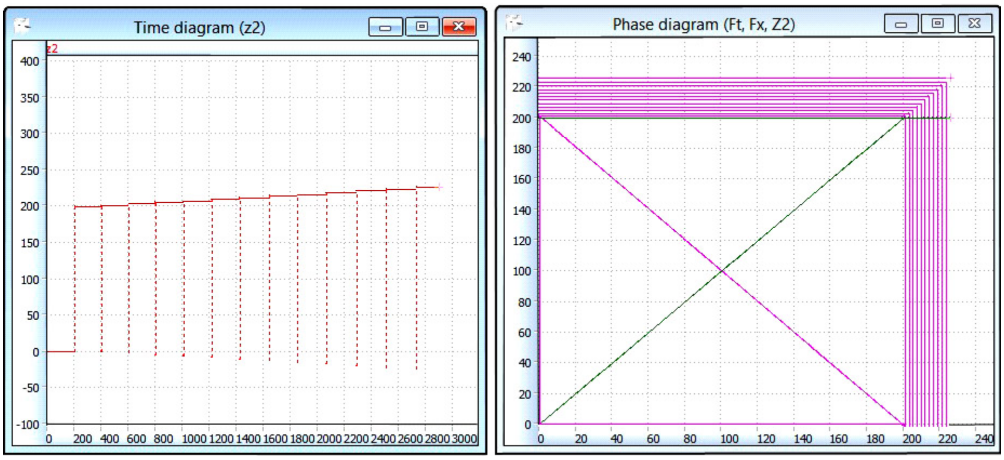

Рис. 3. Неустойчивый случай. $k = 2.01$

Тогда для нахождения периодических точек периода 2 нужно решить уравнение

$$x(1-k)^2 + kN(1-k) + kN = x.$$

Это равносильно системе

$$\begin{cases} (1-k)^2 = 1, \\ kN(1-k) + kN = 0. \end{cases}$$

Решение существует при $k = 2$. Появление 2-периодического решения проиллюстрировано на рис. 4. Решение уравнения $f^n(x) = x$ приводит к системе

$$\begin{cases} (1-k)^n = 1, \\ kN((1-k)^{n-1} + \ldots + 1 - k + 1) = 0. \end{cases}$$

Для четных значений n система имеет решение при $k = 2$, для нечетных — при $k = 0$. Таким образом, для значения параметра $k = 2$ существует цикл периода 2, и, следовательно, циклы периода 2^l, которые представляют собой l обходов цикла периода 2.

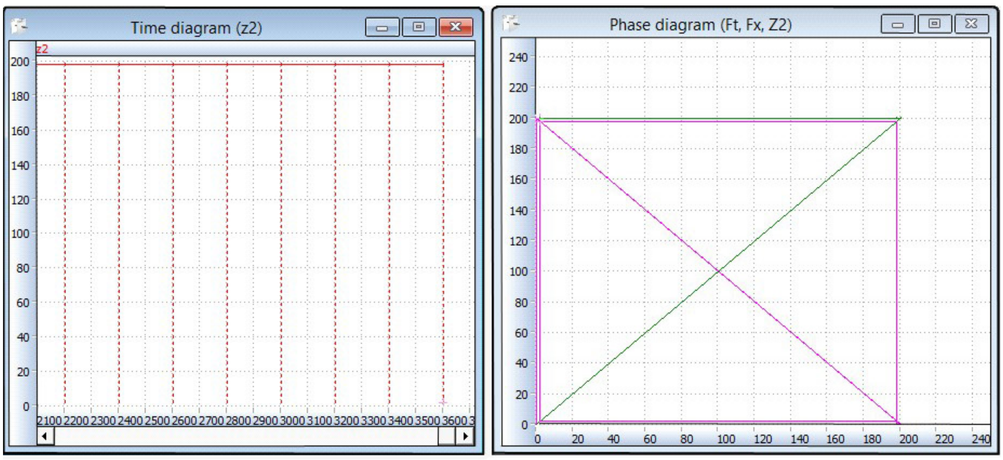

Рис. 4. Цикл с периодом 2 для $k = 2$

3.2. Нелинейное разностное уравнение

Рассмотрим случай когда $N = const, k_n = k\frac{kx_{n-1}}{N}$. Модельное уравнение принимает вид

$$x_n = k\frac{kx_{n-1}}{N}(N - x_{n-1}) + x_{n-1},$$

и неподвижные точки $x = 0$ и $x = N$ находятся из уравнения

$$kx(N - x) = 0.$$

В этом случае $f(x) = k\frac{x}{N}(N - x) + x,\ \ f'(x) = 1 + k - 2\frac{x}{N}$ и мы получаем

$$|f'(0)| = |1 + k| > 1, f'(N)| = |1 - k|.$$

Поэтому точка $x = 0$ является неустойчивой при любых значениях k, а $x = N$ устойчивой при $k < 2$.

Введение новой переменной $y_n = \frac{x_n}{N}$ и переобозначение $x_n = y_n$ приводит к уравнению

$$x_n = kx_{n-1}(1 - x_{n-1}) + x_{n-1},$$

у которого две неподвижные точки: 0 и 1. Нетрудно заметить, что такая замена переменных не влияет на тип устойчивости неподвижных точек, так как

$$f(x) = kx(1 - x) = x,\ \ f'(x) = 1 + k - 2kx,$$

и следовательно

$$f'(0) = 1 + k;\ \ f'(1) = 1 - k.$$

Результаты численного исследования приведены на рис. 5–7. При малом значении параметра вторая неподвижная точка устойчива. При значении $k = 2$ эта точка сохраняет устойчивость, как показывает рис. 6. Случай поведения решений для $k > 2$ (неустойчивая неподвижная точка $x = 1$) показан на рис. 7.

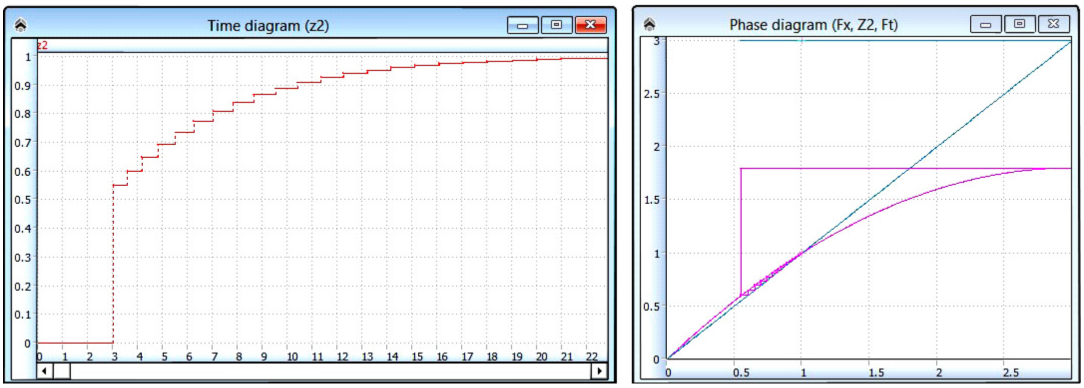

Рис. 5. Существование устойчивой неподвижной точки $x = 1$ при $k = 0.2$

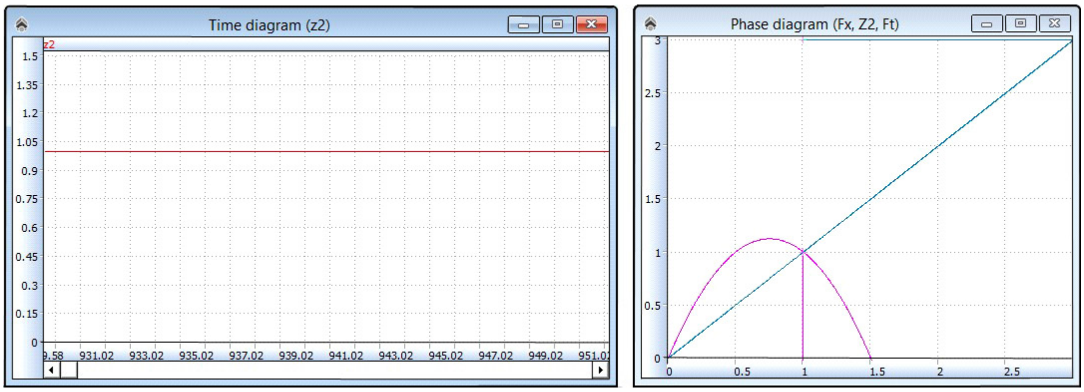

Рис. 6. Существование устойчивого режима при значении параметра $k = 2$

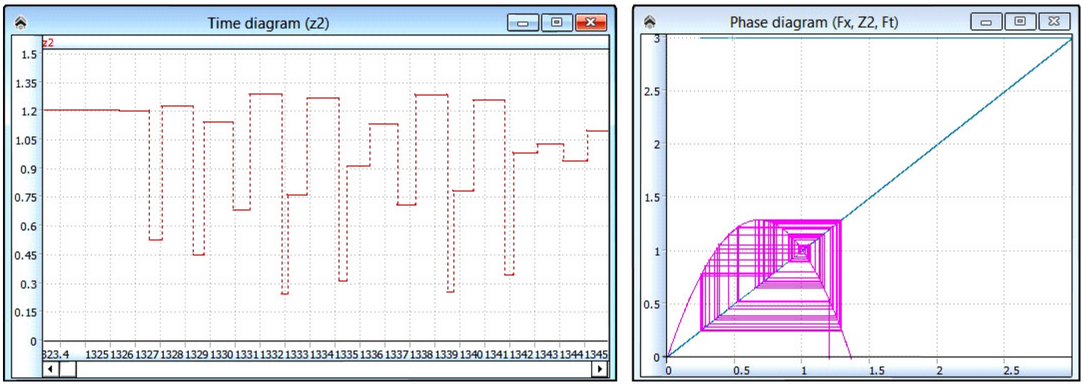

Рис. 7. Неустойчивая неподвижная точка $x = 1$ для $k = 2.8$

3.3. Случайное изменение параметра k

Пусть теперь при каждом n переменная k в нормированном уравнении меняется случайным образом, как показано на рис. 8. В этом случае исследование поведения решений аналитически затруднительно и мы используем пакет RMD. Пример численного исследования уравнения в случае, если параметр k задается как равномерно распределенная величина, показан ниже, на рис. 9.

Заметим, что в этом случае мы строим не диаграммы Ламерея, так как функция правой части строится при фиксированном значении k и лишь ограничивает реальные значения при получаемом распределении.

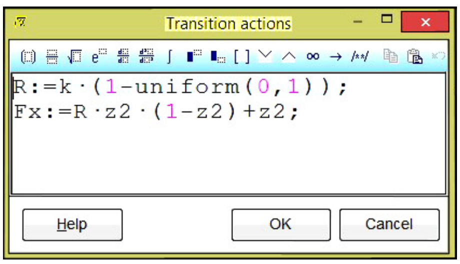

Рис. 8. Задание случайного изменения параметра k

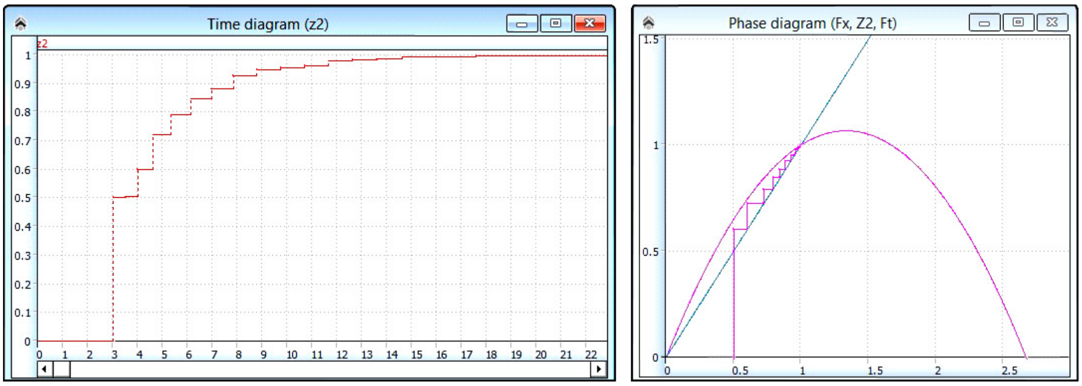

Рис. 9. Поведение решений при $k = 0.6$

4. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА СОЦИОГЕНЕЗА

Рассмотрим модель социогенеза, предложенную и исследованную в статье [9].

Социогенез — процесс исторического и эволюционного формирования общества. В основе модели социогенеза, описанной в статье [9], разделение общества на подсистемы по Т. Парсонсу: экономическая и политическая системы, социетальное сообщество — единый коллектив, подчиняющийся заданным нормам (обеспечивает единство общества), система поддержания институциальных этнических образцов.

В качестве управляющего параметра взят уровень *Пассионарного напряжения*. По определению Л.Н.Гумилева *Пассионарное напряжение* — пассионарность, приходящаяся на одного члена общества. Пассионарность — способность и стремление этнического сообщества к изменению окружения; уровень активности этнического сообщества. Внутренняя энергетика этноса является движущей силой культурного, политического и геополитического созидания.

Предполагается, что динамика системы описывается следующими составляющими: $G(t)$ моделирует развитие политической системы, $E(t)$ — экономической, $K(t)$ — социетального общества и $D(t)$ — системы поддержания институциональных этнических образцов.

Основным управляющим параметром является пассионарное напряжение P. Подробное описание остальных параметров приведено в работе [9], здесь мы обозначим за u вектор, содержащий эти параметры.

Таким образом, рассматривается система

$$\begin{cases} \frac{dG}{dt} = a_{11}(P,u)G + a_{12}\big(u,E\big)E + a_{13}(P,u)\big(K+D\big)G, \\ \frac{dE}{dt} = a_{21}(P,u)E - a_{22}\big(u,G\big)G - a_{23}(P,u)\big(K+D\big)E, \\ \frac{dK}{dt} = a_{31}(u)\big(G^2+E^2\big) - a_{32}\big(P,u,K\big)K - a_{33}(u)D^2, \\ \frac{dD}{dt} = a_{41}(u)G^2 - a_{42}\big(P,u,D\big)D - a_{43}(u)K^2. \end{cases} \tag{4}$$

При заданных начальных условиях на функции $G|_{t=0} = 0$, $E|_{t=0} = 0.1$, $K|_{t=0} = 0.01$, $D|_{t=0} = 0$, значения коэффициентови значении параметра $P = 0.011$ была реализована компьютерная модель социогенеза и, таким образом, дан пример построения, исследования и использования модели трудноформализуемого социального процесса. В рассматриваемой статье было также показано, что в исследуемой системе при заданных значениях параметров возникает бифуркация Хопфа, а именно существует такое пассионарное напряжение P_0, которое является точкой бифуркации рождения цикла, а именно при $P > P_0$ у системы существует периодическое решение. Результаты компьютерных исследований подтверждают этот результат. Графики найденных решений приведены на рис. 10.

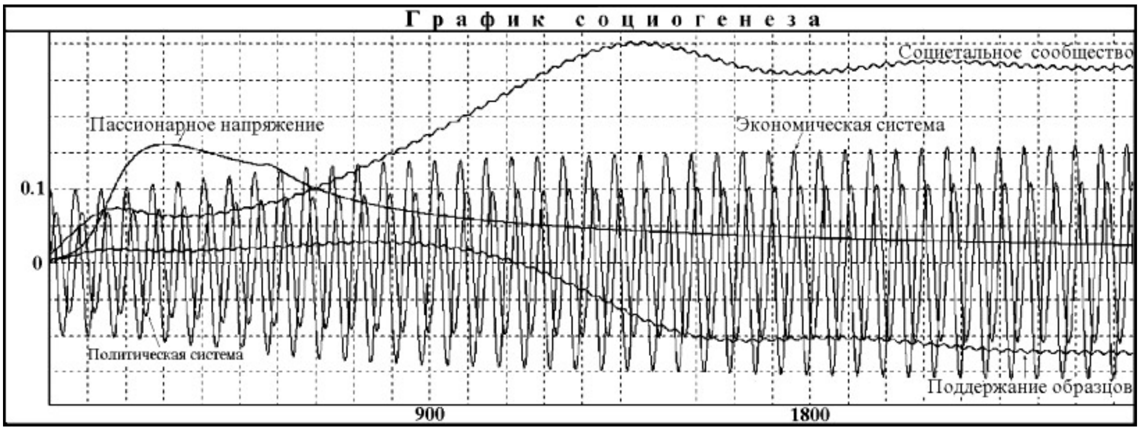

Рис. 10. График социогенеза, полученный в работе [9] для значения $P = 0.011$

Проведем исследование приведенной системы средствами пакета RMD и рассмотрим временную диаграмму развития общества с течением времени.

Легко видеть, что средствами пакета RMD мы получаем аналогичные графики (рис. 11–14). Разница определяется различным заданием пассионарного напряжения. Кроме того, можно отметить, что уровень пассионарного напряжения в обществе не оказывает заметного влияния на поведение политической и экономической функций общества.

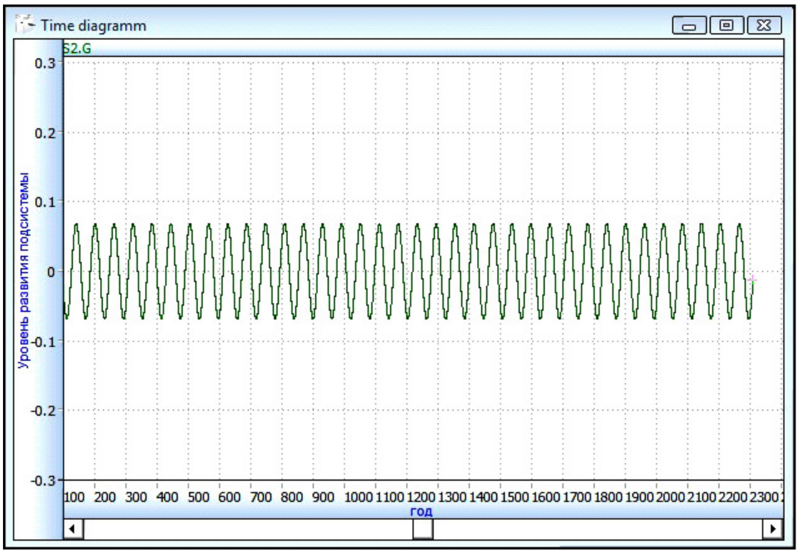

Рис. 11. График функции, моделирующей развитие политической системы при $P = 0.011$

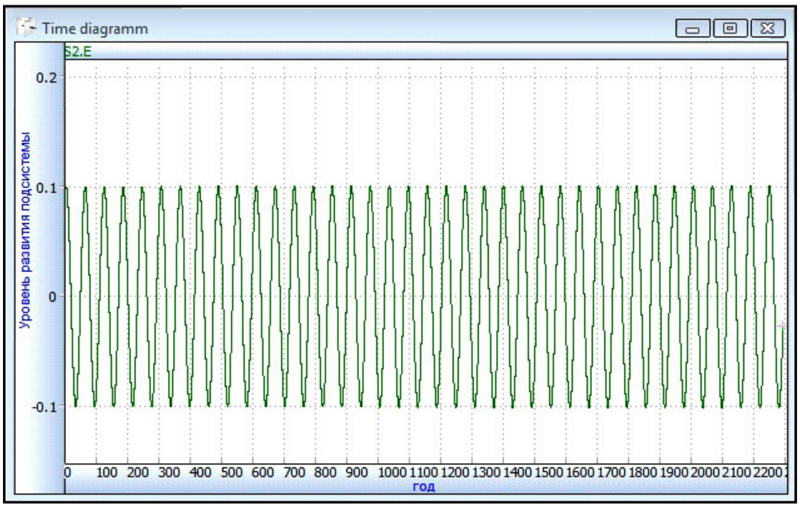

Рис. 12. График функции, моделирующей развитие экономической системы при $P = 0.011$

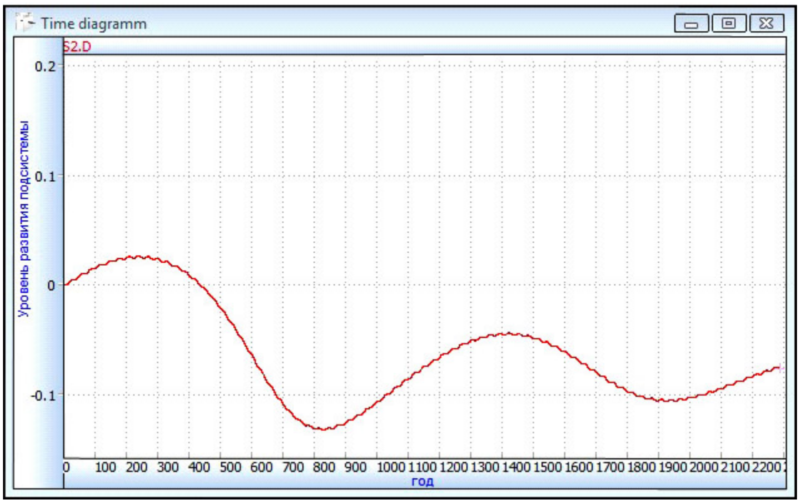

Рис. 13. График функции поддержания институциональных этнических образцов при $P = 0.011$

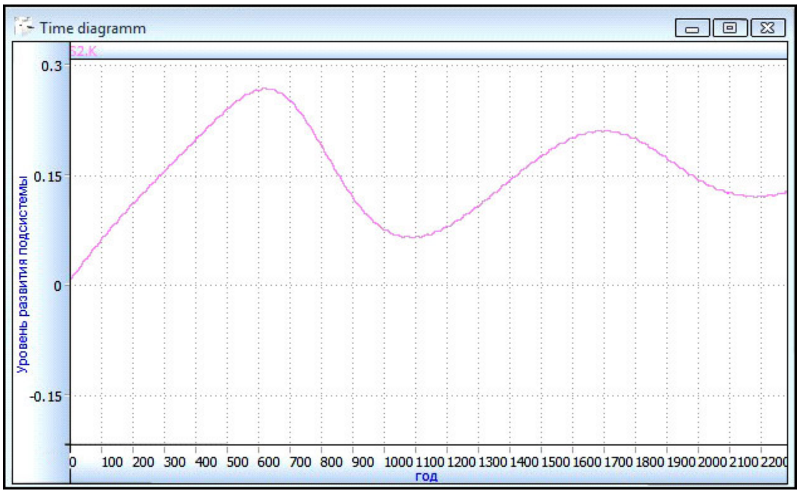

Рис. 14. График функции развития социетального общества при $P = 0.011$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе, на примерах известных социологам моделей социальной диффузии и социогенеза, обладающих сложным поведением и интересной математической природой, был продемонстрирован процесс создания и исследования моделей в среде визуального моделирования RandModelDesigner 7. Для выбранных нами моделей в виде дифференциальных и разностных уравнений язык моделирования потребовал только привычного математического описания объекта, а вся остальная работа свелась к анализу полученных результатов, представленных стандартными способами. В то же время, среда позволяет не только исследовать модели стандартными средствами, но и самостоятельно создавать нужные инструменты, как это было продемонстрировано на примере диаграмм Ламерея. Возможности среды моделирования много шире, чем описано в этой статье, и это становится очевидным при исследовании многокомпонентных систем — например, различных сообществ, взаимодействующих между собой по заданным правилам. Современные версии среды позволяют строить и «агентные» системы. Таким образом можно использовать одну среду и для исследования классических однокомпонентных динамических систем, многокомпонентных систем, и «агентных». На сайте http://dcn.icc.spbstu.ru создается раздел, посвященный использованию среды RandModelDesigner в различных прикладных областях, в частности в социологии. В этом разделе будут накапливаться созданные модели, что, как мы надеемся, будет способствовать более быстрому проникновению визуального моделирования в социологию.

Список литературы

1. *Sonis M.* Discrete nonlinear probabilistic chains. Functional differential equations, 2003. Vol. 10, № 3–4. P. 593–639.
2. *Арапов М.В., Херц М.М.* Математические методы в лингвистике. М., 1974.
3. *Бенькович Е.С., Колесов Ю.Б., Сениченков Ю.Б.* Практическое моделирование динамических систем. СПб.: БХВ-Петербург, 2002.
4. *Давыдов А.* Об одной математической модели социальной динамики. М., 2001.
5. *Джери Д., Джери Д.* Большой толковый социологический словарь (Collins). Том 1 (А-О). М.: Вече, АСТ, 2001.
6. *Колесов Ю.Б. Сениченков Ю.Б.* Объектно-ориентированное моделирование в среде RandModelDesigner 7. Учебно-практическое пособие. М.: Проспект, 2016.
7. *Конюховский П.В.* Математические методы исследования операций в экономике. СПб.: Питер, 2000.
8. *Коробицын В.В., Фролова Ю.В.* Имитационное моделирование социализации индивида // Математические структуры и моделирование, 2000. № 2 (6). С. 97–103.
9. *Лаптев А.А.* Математическое моделирование социальных процессов // МСиМ, 1999. №1 (3). С. 109–124.
10. *Нелюбин Л.Л.* Перевод и прикладная лингвистика. М.: Высшая школа, 1983.
11. *Петров И.Б.* Математическое моделирование в медицине и биологии на основе моделей механики сплошных сред // ТРУДЫ МФТИ, 2009. № 1. С. 5–16.
12. *Плотинский Ю.М.* Модели социальных процессов: Учебное пособие для высших учебных заведений. Изд. 2-е, М.: Логос, 2001.
13. *Трояновский В.М.* Элементы математического моделирования в макроэкономике. М.: Издательство РДЛ, 2001.
14. *Хай Г.А.* Теория игр в хирургии. Л.: Медицина, 1978.
15. *Четыркин Е.М.* Финансовая математика. М.: Дело, 2001.
16. *Шелобаев С.И.* Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по эконом. спец. М.: ЮНИТИ, 2000.

Поступила в редакцию 16.07.2016, окончательный вариант — 10.09.2016.

Computer tools in education, 2016
№ 5: 5–16
http://ipo.spb.ru/journal

MATHEMATICAL MODELS IN SOCIOLOGY AND THEIR INVESTIGATIVE TECHNIQUES

Kozireva D.D.[1], Ampilova N.B.[1]
[1]SPbSU, Saint-Petersburg, Russia

Abstract

In sociology mathematical methods based on statistic approach have long been in use. With advances in the theory and methods of dynamical sustems , and computer technologies the computer modeling methods become one of main exploration tools. A great body of models describing complex processes in society are dynamical systems or non-autonomous differential and difference equations with a large number of parameters. In this connection the choice of an appropriate tool for study of such systems is of considerable importance. In this work we consider tye environment for visual modeling RMD (RandModelDesign) designed for studying complex systems and having simple and convenient interface and high- level modeling language. The advantages of the package are demonstrated with models of social diffusion and sociogenesis.

Keywords: *dynamical systems, computer modeling, visual modeling environment RMD, social diffusion, sociogenesis.*

Citation: Kozireva, D. & Ampilova, N., 2016. “Matematicheskie modeli v sotsiologii i metody ikh issledovaniya” [“Mathematical Models in Sociology and Their Investigative Techniques”], *Computertools in education*, no. 5, pp. 5–16.

Received 16.07.2016, the final version — 10.09.2016.

Daria D. Kozireva, PhD student, Computer Science Department SPbSU, dmi7580@yandex.ru

Natalya B. Ampilova, PhD, Associate Professor Computer Science Department SPbSU; 198504 St.Petersburg, Starii Petergof, Universitetski pr. 28, Comp.Sci.Dept, n.ampilova@spbu.ru

**Козырева Дарья Дмитриевна,
аспирант кафедры информатики СПбГУ,
dmi7580@yandex.ru**

**Ампилова Наталья Борисовна,
кандидат физико-математических наук,
доцент доцент кафедры информатики
СПбГУ; 198504 Санкт-Петербург, Старый
Петергоф, Университетский пр-т 28,
кафедра информатики,
n.ampilova@spbu.ru**