Каштанов Николай Владимирович,
Ляхов Александр Фёдорович

УДК 519.633

ФРАКТАЛЬНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ ВИЗУАЛЬНОГО ОБРАЗА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ

Аннотация

В работе предлагается метод создания визуального образа числовой матрицы. Для его исследования вводится числовая характеристика ? фрактальная размерность, которая наряду с такими характеристиками как определитель матрицы и число обусловленности, позволяют делать заключения о качественных свойствах матрицы и решении соответствующих систем.

Ключевые слова: матрица, фрактальная размерность, определитель, число обусловленности.

Развитие современных информационных технологий позволяет создавать визуальные образы исследуемых объектов самой разной природы, осуществлять обработку этих образов и получать новую информацию как об объекте, так и об инструментах, с помощью которых производилось исследование.

В данной работе предлагается метод создания визуального образа числовой матрицы. Для его исследования вводится числовая характеристика – фрактальная размерность, которая наряду с такими характеристиками как определитель матрицы и число обусловленности, позволяет делать заключения о качественных свойствах матрицы и решении соответствующих систем.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При изучении систем линейных алгебраических уравнений большой размерности качественный анализ матрицы в виде большой числовой таблицы практически невозможен, поэтому возникает потребность визуализации матрицы. Для этого в работе используется графический метод: каждому из элементов матрицы системы ставится в соответствие ячейка, прямоугольник или пиксель определенного цвета. Градация цвета зависит от разброса значений элементов матрицы. Поскольку размеры пикселя малы, то таким способом на экране можно отобразить матрицу большой размерности.

Визуальное представление матрицы позволяет сформулировать ряд новых задач:

1. Определить фрактальную размерность графического изображения матрицы

2. Определить, как изменяется фрактальная размерность матрицы при её преобразованиях.

В настоящее время при анализе и построении графических изображений широко используются фракталы и их различные виды [1–4].

Фрактал (от латинского *fractus* – дробленый, сломанный, разбитый) – термин, означающий геометрическую фигуру, обладающую свойством самоподобия, то есть составленную из нескольких частей, каждая из которых подобна всей фигуре целиком. В более широком смысле под фракталами понимают множества точек в евклидовом пространстве, имеющие дробную метрическую размерность (в смысле Минковского или Хаусдорфа).

На практике, как правило, используется приближённая оценка фрактальной размерности множества.

На плоскости линейный размер множества точек и его площадь связаны. В качестве линейного размера множества возьмем его периметр. Предположим, что площадь и периметр связаны соотношением

$$S = P^D,$$

где S и P – площадь и периметр[1] множества, эти величины определяются из геометрии множеств, D – величина, являющаяся приближённой оценкой фрактальной размерности, которую в дальнейшем будем называть фрактальной характеристикой множества. Выразим D в явном виде:

$$D = \frac{\ln S}{\ln P}. \tag{1}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФРАКТАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ МАТРИЦЫ С ПОМОЩЬЮ ПРОГРАММЫ IMAGEQ

Для определения фрактальной характеристики матрицы и её исследования в среде Microsoft Visual Studio 2005 на языке программирования C++ была написана программа ImageQ . Алгоритм программы и описание интерфейса приводится в приложении.

Программа позволяет сгенерировать квадратные числовые матрицы размерности, кратной степени 2 от (2×2) до (256×256) и построить их визуальный образ. Для упрощения исследования визуальный образ матрицы строился в двух цветах. Положительные элементы матрицы изображаются чёрным цветом, отрицательные элементы – белым. На рис. 1 приведен скриншот программы. На рисунке показана сгенерированная матрица (8×8) и её визуальный образ, вычислены суммарная площадь черных пикселей, периметр, фрактальная размерность образа и число обусловленности матрицы.

Заметим, что программа позволяет вводить исследуемую матрицу в ручном режиме. Матрицу можно вводить поэлементно в соответствующее окно на форме, при этом изменяется её образ.

ИЗМЕНЕНИЕ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ПРИ ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ МАТРИЦЫ

Определим диапазон изменения фрактальных характеристик сгенерированных матриц.

Площадь изображения определяется количеством положительных элементов матрицы N, то есть количеством чёрных пикселей. Площадь каждого пикселя $S_p = 1$, а периметр $P_p = 4$. В этом случае площадь изображения $S = N$.

Периметр изображения будет лежать в следующих пределах. Максимальная длина границ изображения будет иметь место при условии, что каждый пиксель расположен отдельно: $\max P = 4N = 4S$.

Минимальная длина границ будет иметь место при наиболее плотном расположении чёрных квадратов (рис. 2), то есть это будет прямоугольник со сторонами $[\sqrt{S}]$, $\left[\frac{S}{[\sqrt{S}]}\right]$ и присоединенные к ним элементы $S-[\sqrt{S}]\cdot\left[\frac{S}{[\sqrt{S}]}\right]<[\sqrt{S}]$, которые добавляют к периметру две единицы.

Минимальный периметр

$$\min P = 2[\sqrt{S}] + 2\left[\frac{S}{[\sqrt{S}]}\right] + 2 - 2\delta(S \, mod[\sqrt{S}]).$$

Следовательно, фрактальная характеристика лежит в диапазоне

$$\frac{\ln S}{\ln(\max P)} \le D \le \frac{\ln S}{\ln(\min P)}. \tag{2}$$

---

[1] Под периметром множества понимается длина его границы.

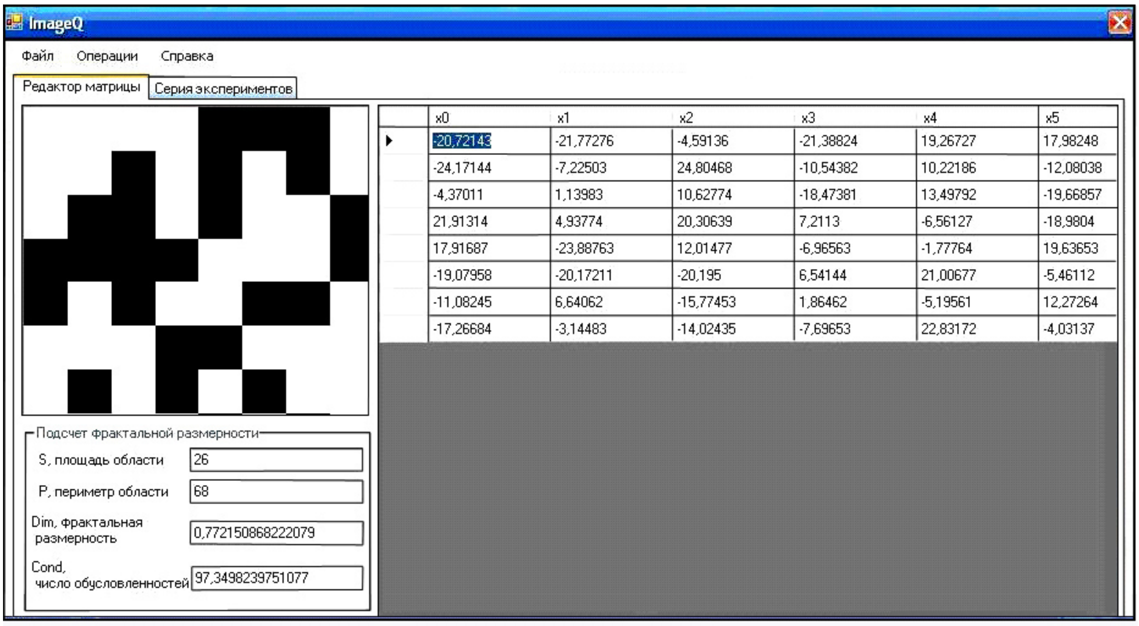

Рис. 1

Приведём пример некоторых фрактальных характеристик для матриц часто встречающегося вида.

Единичная матрица размерности (8×8): её графический образ показан на рис. 3.

$S = 8,\ P = 32,\ Dim = 0{,}6,\ cond = 8$.

На рис. 4 показан визуальный образ трёхдиагональной матрицы и её характеристики.

$S = 22,\ P = 32,\ Dim = 0{,}89189632,\ cond = NaN$ (определитель матрицы равен нулю, то есть число обусловленности не существует).

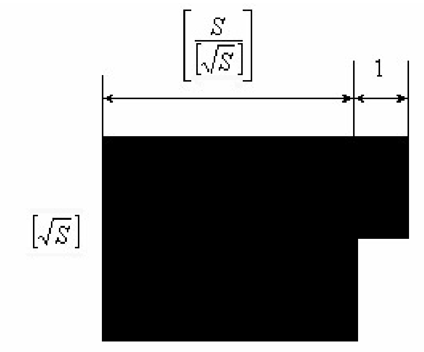

Рис. 2. Фигура минимального периметра

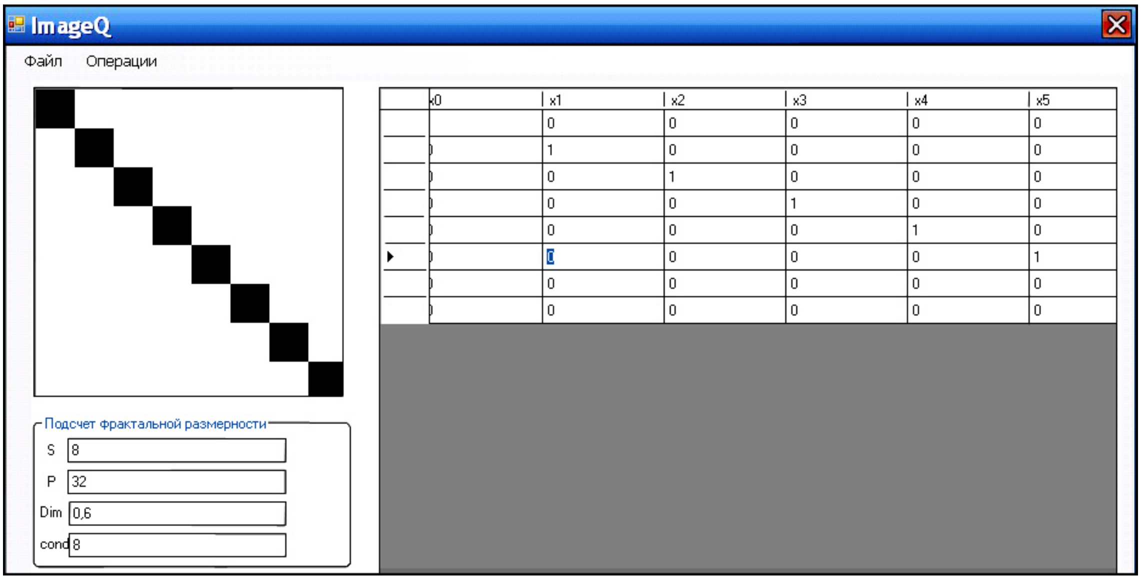

Рис. 3

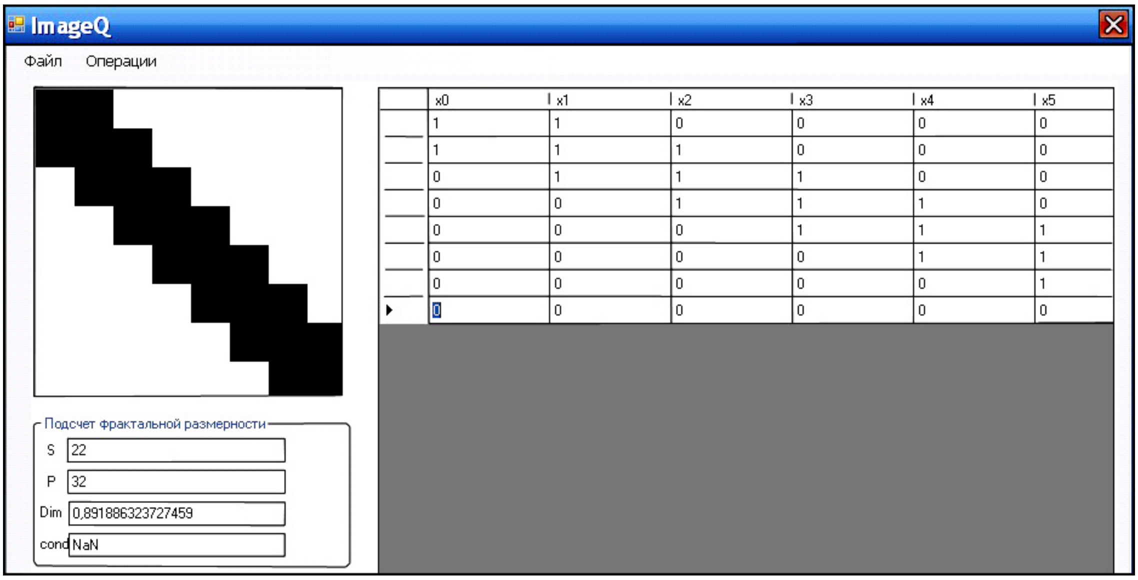

Рис. 4

На рис. 5 показан визуальный образ случайно сгенерированной матрицы (8×8) и её характеристики.

$S = 22$, $P = 74$, $Dim = 0{,}71816181$, $cond = NaN$.

Проведённые многочисленные эксперименты показывают, что для матриц с большим разбросом положительных и отрицательных элементов по матрице фрактальная характеристика матриц размерности (8×8) $Dim \approx 0{,}72$. Для матриц имеющих некоторую структуру, выражающуюся в заполнении внутренних миноров матрицы однородными элементами, фрактальная характеристика матрицы значительно больше.

Предложенный анализ наиболее нагляден и полезен для сильно разряженных матриц, так как ненулевые элементы матрицы распределены по всей матрице, в этом случае фрактальная характеристика будет минимальной. Любое увеличение этой характеристики для таких матриц говорит о неоднородности их структуры.

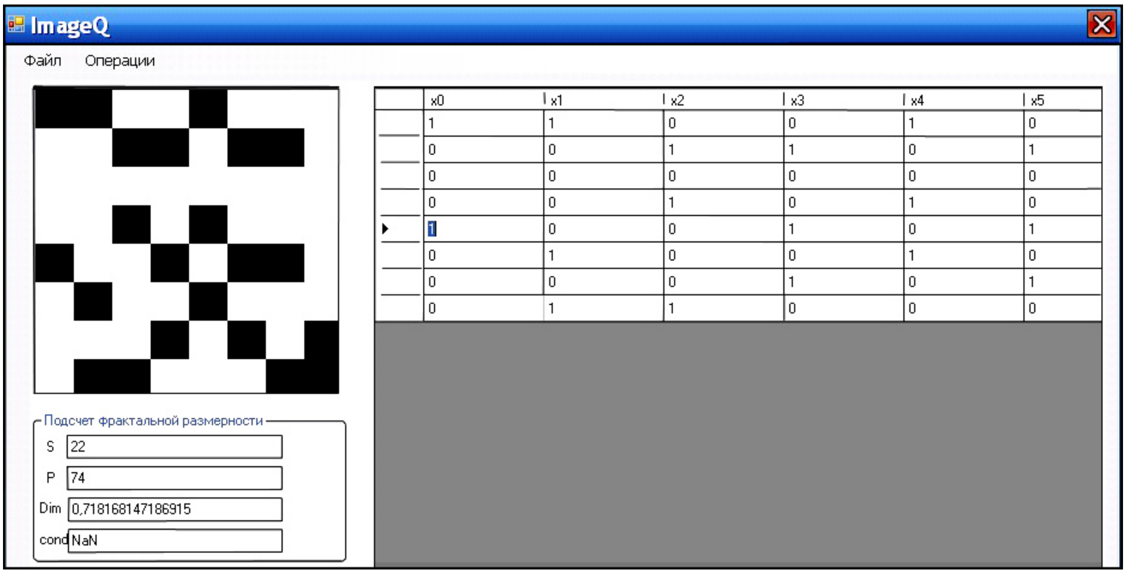

Рис. 5

Заметим, что в приведённой последовательности примеров матриц единичная матрица имеет меньшее число элементов по сравнению с другими матрицами, и она может быть отнесена к сильно разрежённым матрицам.

При решении систем линейных уравнений и выполнении различных исследований, связанных с преобразованием матриц, наиболее часто используются линейные преобразования. При этих преобразованиях либо столбцы, либо строки матрицы умножаются на число, переставляются, складываются, вычитаются. Известно, что при этих преобразованиях определитель матрицы и число обусловленности изменяются.

Фрактальная характеристика матрицы также изменяется при линейных преобразованиях матрицы. Например, даже при перестановке строк будет происходить изменение контура фигур, визуализирующих элементы матриц, а площадь будет оставаться неизменной, то есть фрактальная характеристика изменится.

Заметим также, что при выполнении линейных преобразований изменяются численные соотношения между элементами матрицы, а при создании визуального образа происходит округление этих различий, и получаемые образы будут качественно отличаться.

Программа ImageQ позволяет сгенерировать матрицу, получить её образ и соответствующие характеристики, а затем получить образ матрицы, приведённой к треугольному виду. На рис. 6 приведены визуальный образ матрицы размерности 64×64 и образ матрицы после её приведения к треугольному виду. При этом значение фрактальной характеристики изменяется с 0,915 до 0,898.

На рис. 7 показана матрица размерности 256×256. Её фрактальная характеристика до преобразования $Dim = 0{,}93712$, после преобразований – $Dim = 0{,}93336$.

Рис. 6

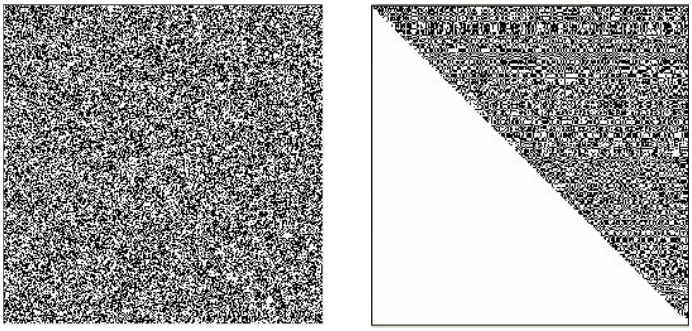

Рис. 7

ЧИСЛО ОБУСЛОВЛЕННОСТЕЙ МАТРИЦЫ И ХАРАКТЕРИСТИКА ИЗОБРАЖЕНИЯ

Программа ImageQ позволяет осуществлять многократное повторение численного эксперимента по генерации матрицы и вычисления ее характеристики. Поскольку в этом случае матрица генерируется случайным образом, то и соответствующее ей изображение, а значит и его характеристика случайны. При многократном повторении опыта, можно говорить о математическом ожидании и дисперсии случайной величины – характеристики изображения. Эти характеристики также определяются программой.

Изменение математического ожидания $M[D]$ фрактальной характеристики случайно сгенерированной матрицы с ростом её размерности n отражено на рис. 8.

Численные эксперименты по генерации матриц различного размера и подсчет их характеристик показывают, что с ростом размера матрицы существенно растет её число обусловленности. При этом характеристика соответствующего изображения приближается к 0,93. Для матриц небольшого разме-

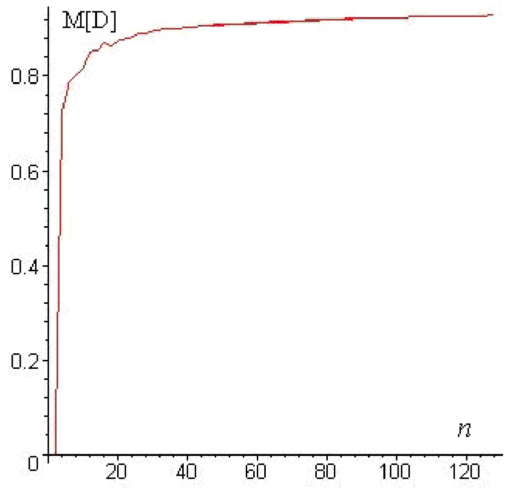

Рис. 8

ра с малым числом обусловленностей характеристика составляет 0 – 0,7. Результаты экспериментов приведены в табл. 1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведённые исследования показывают, что современные информационные технологии позволяют осуществлять визуализацию числовых матриц и исследование полученных образов. Фрактальная размерность изображения, наряду с такими характеристиками как определитель матрицы и число обусловленности, позволяют делать заключение о структуре и качественных свойствах матрицы и решении соответствующих систем.

Табл. 1. Рост числа обусловленностей и фрактальной размерности с ростом размера матриц

Размер	Математическое ожидание числа обусловленности	Математическое ожидание фрактальной характеристики
2	2,29	0,528
4	37	0,6
8	149	0,845
16	69	0,859
32	723	0,89
64	991	0,912
128	3380	0,928
256	16000	0,9375

Приложение

ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА РАБОТЫ ПРОГРАММЫ IMAGEQ

Программа **ImageQ** написана в среде Microsoft Visual Studio 2005 на языке программирования C++. Программа состоит из двух базовых частей – класс «Матрица» и класс «Форма».

Первый обеспечивает удобство работы с числовыми матрицами, хранит их в памяти в виде таблиц и позволяет методами класса вычислять характеристики матрицы, а также проводить такие операции, как бинаризация.

Второй предназначен для визуального отображения интерфейса пользователя и представляет собой объект Windows::Forms. Имеет в своем составе меню управления и элементы для визуализации экспериментов.

Элемент PictureBox позволяет отображать на форме изображения различного размера и формата. При загрузке изображения с жесткого диска компьютера происходит построение массива бит в формате RGB, который используется для бинаризации исходного изображения. Для этого высчитывается среднее арифметическое каждой из компонент цвета для каждого пикселя и сравнивается с некоторым пороговым значением. В зависимости от результата сравнения происходит замена значений RGB компонент на $\{0, 0, 0\}$, что соответствует черному, либо на $\{255, 255, 255\}$, что соответствует белому цвету. Одновременно с этим происходит заполнение элементов матрицы значениями +1 или –1 в зависимости от цвета пикселя. Пиксель с координатами x, y соответствует x-столбцу и y-строке матрицы.

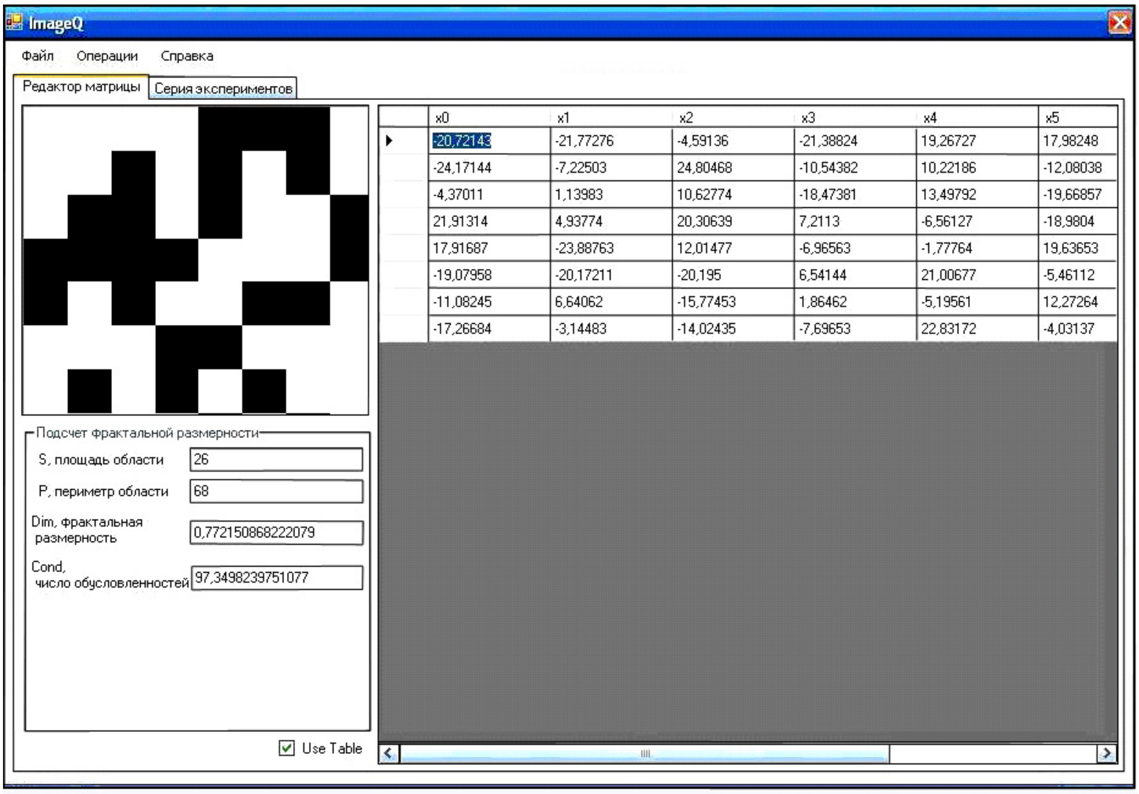

Рис. Интерфейс программы ImageQ

При запуске алгоритма подсчета характеристики изображения сначала подсчитывается число положительных элементов матрицы – это число равно площади множества на изображении, поскольку черные пиксели обозначены в матрице +1. Далее происходит перебор всех элементов матрицы и для каждого элемента, равного +1, подсчитывается количество граничных с ним элементов, равных –1. Это соответствует количеству переходов с черного пикселя на белый в изображении, то есть периметру множества. Дальнейший подсчет производится по формуле (3).

В случае запуска серии экспериментов происходит многократное повторение действий, описанных выше, и результат каждой итерации запоминается. Впоследствии по записанным результатам вычисляется экспериментальное математическое ожидание характеристики и ее дисперсия. Процесс выполнения серии экспериментов отображается при помощи ProgressBar.

Управление программой осуществляется при помощи основного меню формы. Для открытия изображения или загрузки матрицы необходимо выбрать пункт меню **Файл→Открыть** или **Файл→Загрузить**. В случае если выбранное в проводнике изображение не удовлетворяет поставленным требованиям (размер 256 на 256), то программа выдаст сообщение о некорректности входных данных. При удачном открытии изображения но будет отображено на форме. Для его бинаризации и подсчета характеристики следует в меню выбрать пункт **Операции→Бинаризация и подсчет**. Результаты работы программы будут выведены в соответствующие поля, а изображение будет преобразовано в черно-белое.

Для генерации матриц необходимо выбрать пункт **Операции→Сгенерировать**. При этом генерируются матрицы размерности, кратной степени двойки.

Для вывода характеристик сгенерированной матрицы и её бинаризированного изображения необходимо выбрать пункт **Бинаризация и подсчет**. Поставив галку в окно **Use Table** на соответствующем поле, получим численные значения сгенерированной матрицы. Следует заметить, что эти значения можно поэлементно менять.

Для запуска серии экспериментов необходимо ввести в поле **Число экспериментов в серии** количество желаемых экспериментов, а затем выбрать пункт меню **Операции→Серия экспериментов**. Процесс выполнения серии будет сопровождаться перерисовкой ProgressBar. После завершения серии вычислений математическое ожидание характеристики изображения, его дисперсия, а также математическое ожидание числа обусловленности и его дисперсия будут выведены в соответствующие поля.

Для завершения работы программы следует выбрать пункт меню **Файл→Выход.**

Желающие получить программу обращайтесь по электронному адресу: ALF19545@ramble.ru

Литература

1. *Александров П.С., Пасынков Б.А.* Введение в теорию размерности. М.: Наука 1973.
2. *Кроновер Р.М.* Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. М.: Постмаркет, 2003.
3. *Тарасевич Ю.Ю.* Перколяция: теория, приложения, алгоритмы / Учебное пособие М.: Едиториал УРСС, 2002.
4. *Морозов А.Д.* Введение в теорию фракталов. Москва-Ижевск: Инстиут компьютерных исследований, 2002.

Abstract

This work represents research results of visual image of numeric matrices. Fractal dimension of matrix's image can be used along with determinant and condition number to identify qualitative properties of the matrix.

Keywords: Matrix, fractal dimensionality, a determinant, number of conditionality.

Ляхов Александр Фёдорович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики механико-математического факультета Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (Национального исследовательского университета),

Lyakhov@mm.unn.ru,

Каштанов Николай Владимирович, магистр прикладной математики и информатики, инженер-программист ООО «Мера НН»,

Kashnick@inbox.ru