

КОЛЕБАНИЯ МАЯТНИКА С ПРЕДЕЛЬНО БОЛЬШИМИ АМПЛИТУДАМИ

Аннотация

Колебания простого жесткого маятника с предельно большими амплитудами, близкими к 180° , трактуются на основе физически оправданного приближения, заключающегося в разделении полного цикла колебаний на несколько частей. Большая часть почти замкнутого кругового пути груза маятника аппроксимируется лимитационным движением, а движение в малой окрестности перевернутого положения описывается с помощью линейаризованного дифференциального уравнения. Такой подход позволяет лучше понять динамику поведения нелинейных физических систем. Полученное на его основе простое аналитическое выражение для периода колебаний с предельно большой амплитудой дает значения, очень близкие к тем, что следуют из точной формулы, основанной на полном эллиптическом интеграле первого рода $K(q)$.

Ключевые слова: простой маятник, фазовая траектория, лимитационное движение, линейаризованное уравнение, компьютерное моделирование.

1. ВВЕДЕНИЕ

Старая задача о больших колебаниях простого жесткого маятника в одной плоскости продолжает привлекать внимание педагогической общественности. Множество статей на эту тему появилось на протяжении последних десяти лет в периодической литературе – см., например, [1–5] и приведенные там ссылки. В большинстве статей делаются попытки получить в элементарных функциях приближенные формулы для периода больших колебаний с помощью разного рода аппроксимационных схем. Каждый из авторов обычно утверждает, что предложенная им формула отличается большей простотой и точностью по сравнению с другими приближенными формулами. Детальное сравнение некоторых опубликованных

в литературе приближенных выражений можно найти в статье [6]. Общая черта всех таких аппроксимационных схем сводится к поиску некоторого эмпирического выражения для периода $T(\varphi_m)$, которое давало бы при больших амплитудах φ_m приемлемое численное согласие с теми значениями, которые получаются из точной формулы, выражающей период через полный эллиптический интеграл первого рода $K(q)$:

$$T(\varphi_m) = T_0 \frac{2}{\pi} K(\sin^2(\varphi_m/2)),$$

$$K(q) = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{1 - q \sin^2 x}}, \quad (1)$$

где $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{l/g}$ и ω_0 – соответственно собственный период и частота колебаний бесконечно малой амплитуды, l –

приведенная длина маятника, g – ускорение свободного падения.

Приближенные выражения для периода, которые можно найти в литературе (см. [6] и приведенные там ссылки) дают неограниченно возрастающие ошибки по мере приближения амплитуды маятника к 180° . Более того, все эти упражнения с поисками различных аппроксимационных схем носят формальный характер и не способствуют более глубокому пониманию нелинейной динамики и физики поведения маятника при больших амплитудах.

В настоящей статье предлагается радикально отличный подход к проблеме колебаний маятника с предельно большими амплитудами. Предлагаемый подход основан на физически прозрачном представлении цикла больших колебаний состоящим из нескольких стадий, на протяжении каждой из которых движение маятника можно описать аналитически с высокой точностью с помощью элементарных функций. Принципиальная идея такого подхода очень проста: движение маятника в небольшой окрестности перевернутого положения можно рассматривать с помощью линейного дифференциального уравнения, если в качестве переменной использовать угол $\alpha = \pi - \varphi$, образуемый маятником с направленной вверх вертикалью, а остающаяся часть движения (составляющая почти полный оборот) почти неотличима от лимитационного движения (движения по сепаратрисе), для которого существует решение в элементарных функциях. Точность окончательной (очень простой) формулы для периода (см. ниже уравнение (14) на стр. 7) возрастает по мере приближения амплитуды к 180° . Мы уже использовали такой подход ранее в [7] при сравнении колебаний большой амплитуды с полными переворотами маятника. Цель данной статьи заключается в том, чтобы привлечь внимание к этому плодотворному подходу, способствующему более глубокому физическому пониманию нелинейной динамики маятника – очень популярной физической модели, часто встречающейся в разнообразных приложениях.

2. ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ МАЯТНИКА

Напомним некоторые особенности поведения простого маятника, существенные для проблемы колебаний с большими амплитудами. Решение $\varphi(t)$ дифференциального уравнения для простого маятника без трения

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin \varphi = 0 \quad (\omega_0 = \sqrt{g/l}) \quad (2)$$

можно выразить в элементарных функциях в предельном случае колебаний малой амплитуды: когда $\sin \varphi \approx \varphi$, уравнение (2) становится линейным и описывает простое гармоническое колебание с частотой ω_0 . Для описания колебаний большого размаха, равно как и полных переворотов, необходимы специальные функции (так называемые эллиптические функции). Тем не менее, общий характер изменения со временем механического состояния нелинейной системы, такой, как маятник, можно наглядно представить с помощью траекторий на фазовой плоскости $(\varphi, \dot{\varphi})$, то есть графиков, изображающих зависимость угловой скорости $\dot{\varphi}$ от угла отклонения φ . Семейство таких траекторий, соответствующих разным значениям энергии, образует фазовый портрет системы. Фазовый портрет дает ясное представление о возможных движениях нелинейной системы.

Фазовый портрет нелинейной консервативной системы (например, маятника без трения) можно построить, не решая явно дифференциального уравнения системы. В самом деле, уравнения фазовых траекторий непосредственно следуют из закона сохранения энергии. В отсутствие трения полная энергия маятника E , то есть сумма его кинетической энергии

$$E_{\text{kin}}(\dot{\varphi}) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 \quad \text{и потенциальной энергии } E_{\text{pot}}(\varphi) = mgl(1 - \cos \varphi), \text{ остается постоянной при движении маятника:}$$

$$\frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi) = E. \quad (3)$$

Это уравнение дает соотношение между $\dot{\varphi}$ и φ и, следовательно, представляет собой уравнение фазовой траектории, соот-

ветствующей определенному значению E полной энергии. Уравнение (3) удобно представить в несколько иной форме. Введем величину $E_m = 2ml^2\omega_0^2 = 2mgl$, которая имеет физический смысл кинетической энергии маятника, вращающегося с угловой скоростью $2\omega_0$, или, иначе, E_m равна потенциальной энергии маятника в перевернутом положении. С помощью E_m уравнение (3) переписывается следующим образом:

$$\frac{\dot{\varphi}^2}{\omega_0^2} + 2(1 - \cos\varphi) = \frac{4E}{E_m}. \quad (4)$$

На рис. 1 несколько фазовых траекторий показаны под графиком $E_{\text{pot}}(\varphi)$.

Если полная энергия E маятника меньше, чем высота потенциального барьера на рис. 1 ($E < 2mgl = E_m$), маятник совершает колебания между максимальными отклонениями φ_m и $-\varphi_m$. При малых амплитудах ($\varphi_m \ll \pi/2$) колебания почти синусоидальные, а фазовая траектория почти не отличается от эллипса. Чем больше полная энергия, тем сильнее фазовая траектория отличается от эллипса, и тем сильнее колебания отличаются от гармонических. При очень больших амплитудах колебаний маятник проводит значительное время в окрестности положений максимального отклонения (точек поворота), где направление его движения изменится на противоположное. Период колебаний возрастает с увеличением амплитуды. Если полная энергия маятника E превышает высоту потенциального барьера ($E > 2mgl = E_m$), маятник оказывается в перевернутом положении с ненулевой угловой скоростью. Это значит, что он совершает полные перевороты.

3. ЛИМИТАЦИОННОЕ ДВИЖЕНИЕ

Особый интерес представляет фазовая траектория, которая соответствует полной энергии E , равной максимально возможному значению потенциальной энергии, а именно $E_{\text{pot}}(\pi) = E_m$.

Эта траектория отделяет центральную часть фазовой плоскости, занятую замкну-

тыми фазовыми траекториями колебательных движений, от внешней области, где проходят фазовые траектории вращательных движений. Эта граница называется *сепаратрисой*. Сепаратриса разделяет фазовую плоскость на области, соответствующие разным видам движения. Уравнение сепаратрисы следует из уравнения (3) при подстановке в него $E = 2mgl$, или из уравнения (4) при подстановке $E = E_m = 2ml^2\omega_0^2$:

$$\dot{\varphi} = \pm 2\omega_0 \cos(\varphi/2). \quad (5)$$

Когда маятник с полной энергией $E = 2mgl$ приближается к перевернутому положению при $\varphi = \pi$ или $\varphi = -\pi$, его скорость уменьшается до нуля, обращаясь в нуль при $\varphi = \pm\pi$.

Это состояние представлено на фазовой плоскости седловыми точками $(\pi, 0)$ и $(-\pi, 0)$, в которых верхняя и нижняя ветви сепаратрисы (уравнение (5)) встречаются на φ -оси. Обе седловые точки представляют одно и то же механическое состояние системы, а именно состояние покоя маятника в неустойчивом перевернутом положении.

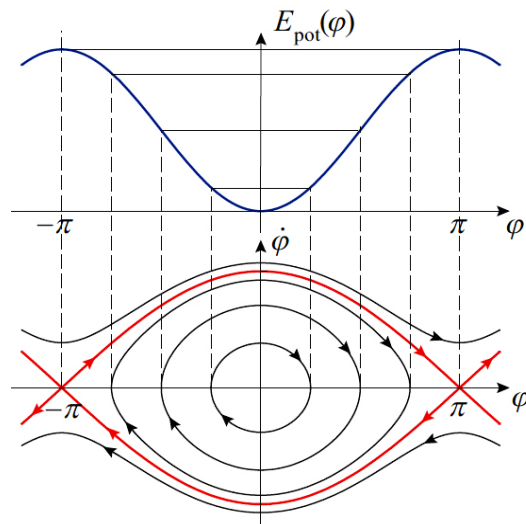


Рис. 1. Потенциальная яма для простого маятника и фазовый портрет в отсутствие трения. Замкнутые фазовые траектории, охватывающие начало координат фазовой плоскости, соответствуют колебаниям с разными амплитудами. Траектории, проходящие выше и ниже сепаратрисы, соответствуют переворотам (вращению) маятника соответственно против и по часовой стрелке

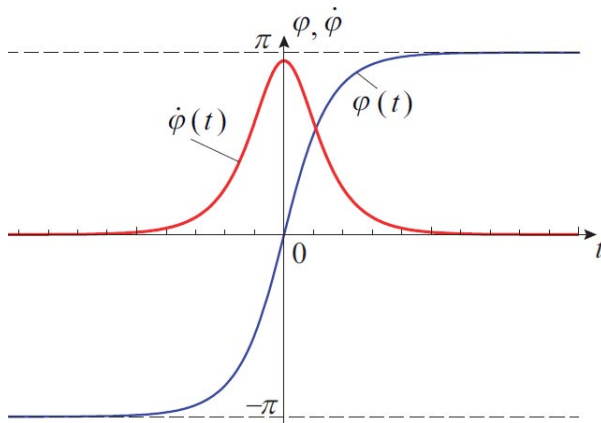


Рис. 2. Графики зависимости от времени угла отклонения $\varphi(t)$ и угловой скорости $\dot{\varphi}(t)$ для лимитационного движения вдоль сепаратрисы от $\varphi = -\pi$ до $\varphi = \pi$ в отсутствие трения. Начало отсчета времени соответствует моменту прохождения маятником нижнего положения равновесия $\varphi = 0$

Малейшее начальное отклонение маятника из этой точки в ту или иную сторону приводит к колебаниям с амплитудой, почти равной π , а малейший начальный толчок вызывает вращение (полные перевороты) маятника.

При таких колебаниях и переворотах маятник быстро проходит почти полный круговой путь, но проводит продолжительное время в окрестности перевернутого положения.

Движение маятника с энергией $E = E_m = 2mgl$, когда изображающая точка на фазовой плоскости движется вдоль сепаратрисы, называется лимитационным. Для лимитационного движения существует аналитическое решение в элементарных функциях. Действительно, интегрирование уравнения (5) с положительным знаком в правой части при начальном условии $\varphi(0) = 0$ дает:

$$\varphi(t) = \pi - 4 \arctan(e^{-\omega_0 t}). \quad (6)$$

Это решение описывает движение против часовой стрелки, которое начинается при $t = -\infty$ из положения $\varphi = -\pi$. При $t = 0$ маятник проходит через нижнюю точку своего кругового пути, и затем продолжает движение до $t = +\infty$, асимптотически приближаясь к $\varphi = +\pi$.

Дифференцируя $\varphi(t)$ по времени t , получаем следующую зависимость угловой скорости $\dot{\varphi}(t)$ для лимитационного движения маятника:

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{2\omega_0}{\cosh(\omega_0 t)} = \frac{4\omega_0}{e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}}. \quad (7)$$

Графики $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ для лимитационного движения показаны на рис. 2. График $\dot{\varphi}(t)$ имеет форму одиночного импульса. В уравнении (7) начало отсчета времени $t = 0$ приходится на момент прохождения маятником нижнего положения равновесия с угловой скоростью $\dot{\varphi} = 2\omega_0$.

Этот момент соответствует пиковому значению импульса на графике угловой скорости. В моменты $t = \pm T_0/2$ по обе стороны от максимума уравнение (7) дает значения угловой скорости, которые составляют всего $\pm 0.17\omega_0$. Поэтому период $T_0 = 2\pi/\omega_0$ малых собственных колебаний дает разумную оценку длительности импульса на графике угловой скорости, то есть времени, которое необходимо маятнику для прохождения почти всего кругового пути из окрестности перевернутого положения через нижнюю точку снова почти до перевернутого положения.

4. КОЛЕБАНИЯ С АМПЛИТУДАМИ, ПРИБЛИЖАЮЩИМИСЯ К 180°

Если маятник отпустить без начальной скорости из почти перевернутого положения (при начальном отклонении, скажем, около 179°), он начнет движение к нижнему положению равновесия с малым начальным ускорением. Начальное ускорение малое, потому что в начальном положении мал момент силы тяжести, ускоряющий маятник: этот момент пропорционален синусу угла отклонения от перевернутого положения. Набрав некоторую скорость, маятник довольно быстро проходит почти весь круговой путь через нижнее положение равновесия. Когда маятник приходит на противоположную сторону от перевернутого положения, его дви-

жение постепенно замедляется по мере того, как он взбирается по склону потенциально-го барьера к его вершине. В отсутствие трения маятник останавливается там, где его угловое расстояние от вертикали становится равным начальному отклонению. Далее от этой точки поворота все движение повторяется в обратном направлении, и через промежуток времени, равный периоду колебаний, маятник оказывается в начальной точке с нулевой скоростью.

Компьютерную программу, моделирующую движение жесткого маятника, можно найти в сети Интернет [8]. Небольшая моделирующая программа (апплет) выполняется непосредственно в любом браузере с предустановленным Java-плагином. Чтобы наблюдать большие колебания маятника, которые обсуждаются в этой статье, нужно отключить вязкое трение (сняв «галочку» в соответствующем боксе программы на панели ввода параметров), и задать соответствующие начальные условия (например, задать начальный угол отклонения около 179° и нулевую начальную скорость). Программа дает возможность строить графики зависимости от времени угла отклонения $\varphi(t)$ и угловой скорости $\dot{\varphi}(t)$, а также строить фазовую траекторию одновременно с визуализацией движения маятника.

Графики $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ для колебаний с амплитудами 179.90° и 179.99° в отсутствие трения, полученные в моделирующем эксперименте, приведены на рис. 3. Сравнивая эти графики, можно сделать вывод, что на большей части своего пути от $-\pi$ до π зависимости от времени $\varphi(t)$ и $\dot{\varphi}(t)$ при амплитудах 179.90° и 179.99° почти идентичны. Нетрудно догадаться, что на этих стадиях движения угол отклонения $\varphi(t)$ и угловая скорость $\dot{\varphi}(t)$ характеризуются почти такой же зависимостью от времени, как и при лимитационном движении по сепаратрисе, показанном на рис. 2. Эта зависимость от времени описывается (в элементарных функциях) простым выражением (6). Поэтому длительность этой стадии движения в случае любых амплитуд, приближающихся к 180° , близка к T_0 (к периоду малых коле-

баний) и может быть с высокой точностью рассчитана при помощи выражения (6), соответствующего движению по сепаратрисе. Длительность остальной стадии, на протяжении которой маятник «топчется» в окрестности перевернутого положения, критически зависит от амплитуды φ_m . Это отчетливо видно из сравнения верхней и нижней частей рис. 3. Эта длительность неограниченно растет при $\varphi_m \rightarrow 180^\circ$. Чтобы рассчитать длительность этой стадии, можно воспользоваться линеаризованным дифференциальным уравнением, применимым при малых отклонениях от перевернутого положения. Это будет сделано ниже.

Замкнутая фазовая траектория колебаний большой амплитуды φ_m показана на рис. 4. Большая часть фазовой траектории почти совпадает с сепаратрисой. Изображающая точка обходит всю замкнутую орбиту за один период колебаний T . Далее рассмотрим четверть этой кривой, которая начинается в фазовой плоскости в точке наибольшего отклонения $\varphi = \varphi_m$ при $t = 0$ с нулевой начальной скоростью $\dot{\varphi}(0) = 0$, и заканчивается в точке $\varphi = 0$ (отмеченной как $t = T/4$ на рис. 4 а). Чтобы рассчитать это время $t = T/4$, выберем на траектории произвольную точку $\varphi = \varphi_c$ поблизости от пе-

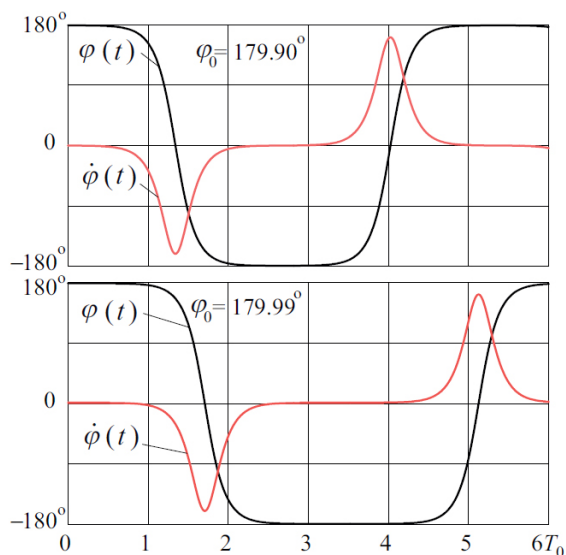


Рис. 3. Графики угла отклонения $\varphi(t)$ и угловой скорости $\dot{\varphi}(t)$ для колебаний с амплитудами 179.90° и 179.99° в отсутствие трения

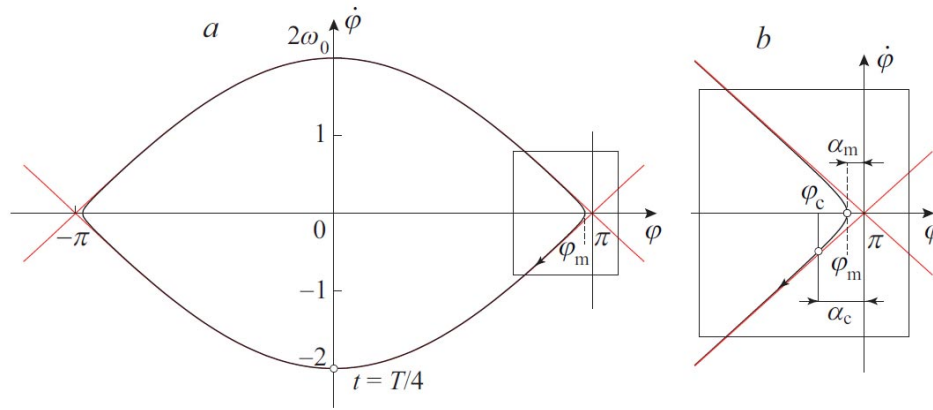


Рис. 4. Фазовая траектория колебаний с большой амплитудой φ_m (a) и ее увеличенная часть, соответствующая движению маятника в окрестности перевернутого положения (b)

ревернутого положения $\varphi = \pi$ (см. рис. 4, b). Эта точка φ_c делит рассматриваемую фазовую кривую на две части. Первая ее часть, протянувшаяся от начальной точки $\varphi = \varphi_m$ до $\varphi = \varphi_c$, лежит в малой окрестности перевернутого положения.

Поэтому длительность t_1 движения вдоль этого участка можно рассчитать с помощью линеаризованного дифференциального уравнения движения маятника (см. ниже). Вторая часть, протянувшаяся от $\varphi = \varphi_c$ до $\varphi = 0$, почти неотличима от сепаратрисы. Поэтому длительность t_2 движения вдоль этого участка можно сразу же найти с помощью уравнения (6):

$$\omega_0 t_2 = -\ln \tan \frac{\pi - \varphi_c}{4} = -\ln \tan \frac{\alpha_c}{4} \approx \ln \frac{4}{\alpha_c}. \quad (8)$$

Здесь введено обозначение $\alpha_c = \pi - \varphi_c$ для угла, образуемого маятником при $\varphi = \varphi_c$ с направленной вверх вертикалью (с перевернутым положением). Когда угол φ_c близок к π , угол α_c мал, так что в уравнении (8) можно положить $\tan(\alpha_c/4) \approx \alpha_c/4$. Поэтому $\omega_0 t_2 \approx \ln(4/\alpha_c)$.

Рассматривая движение маятника в малой окрестности перевернутого положения, удобно задавать мгновенное положение маятника не углом φ , а углом α его отклонения от положения неустойчивого равновесия. Этот угол равен $\pi - \varphi$, так что $\varphi = \pi - \alpha$. Подставляя угловое ускоре-

ние $\ddot{\varphi} = -\ddot{\alpha}$ и $\sin \varphi = \sin \alpha$ в уравнение (2), получаем дифференциальное уравнение маятника в терминах угловой переменной α . Поскольку вблизи перевернутого положения $\alpha \ll 1$, в этом уравнении можно заменить $\sin \alpha$ на α . Таким образом получаем следующее линейное дифференциальное уравнение, приближенно справедливое для движения маятника между $\varphi = \varphi_m$ и $\varphi = \varphi_c$:

$$\ddot{\alpha} - \omega_0^2 \alpha = 0. \quad (9)$$

Общее решение этого линейного уравнения можно представить в виде суперпозиции двух экспоненциальных функций времени t :

$$\alpha(t) = C_1 e^{\omega_0 t} + C_2 e^{-\omega_0 t}. \quad (10)$$

Начальные условия для движения от $\varphi = \varphi_m$ до $\varphi = \varphi_c$ имеют вид $\alpha(0) = \alpha_m$ и $\dot{\alpha}(0) = 0$. Эти условия позволяют найти постоянные C_1 и C_2 общего решения (10):

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} \alpha_m (e^{\omega_0 t} + e^{-\omega_0 t}) = \alpha_m \cosh \omega_0 t. \quad (11)$$

Чтобы найти продолжительность t_1 движения маятника от $\varphi = \varphi_m$ до $\varphi = \varphi_c$ (от $\alpha = \alpha_m$ до $\alpha = \alpha_c$), подставим в выражение (11) $\alpha(t) = \alpha_c$:

$$\alpha_c = \frac{1}{2} \alpha_m (e^{\omega_0 t_1} + e^{-\omega_0 t_1}) \approx \frac{1}{2} \alpha_m e^{\omega_0 t_1}. \quad (12)$$

Второй член в правой части выражения (12) опущен. Это допустимо при условии, что произвольный угол α_c (который разде-

ляет фазовую траекторию рассматриваемого движения на две части) выбран большим по сравнению с α_m . Из (12) получаем искомое время t_1 движения на первом участке траектории:

$$\omega_0 t_1 = \ln \frac{2\alpha_c}{\alpha_m}. \quad (13)$$

Искомый период колебаний T в четыре раза больше рассчитанной продолжительности $t_1 + t_2$ движения от $\varphi = \varphi_m$ до нижнего положения равновесия $\varphi = 0$. Складывая t_1 из выражения (13) и t_2 из (8), получаем следующее окончательное выражение для периода колебаний маятника с большой амплитудой φ_m , приближающейся к 180° :

$$T = 4(t_1 + t_2) = \frac{4}{\omega_0} \left(\ln \frac{2\alpha_c}{\alpha_m} + \ln \frac{4}{\alpha_c} \right) = \frac{2}{\pi} T_0 \ln \frac{8}{\alpha_m}. \quad (14)$$

Здесь $\alpha_m = \pi - \varphi_m$. Отметим следующее замечательное обстоятельство. Оба промежутка времени t_1 и t_2 зависят от значения угла α_c , который был выбран для того, чтобы разделить движение маятника на одну часть, соответствующую его движению в окрестности перевернутого положения, и вторую часть, на протяжении которой его движение почти совпадает с лимитационным, то есть с движением по сепаратрисе. Однако эта зависимость от α_c пропадает, когда мы складываем t_1 и t_2 : окончательное выражение (14) для периода колебаний не зависит от произвольно выбранного угла α_c (при условии, что $\alpha_m \ll \alpha_c \ll 1$).

Приближенное значение периода, даваемое выражением (14), тем точнее, чем ближе амплитуда φ_m к 180° . Таблица 1 иллю-

стрирует точность этого простого выражения для периода колебаний с предельно большими амплитудами. Значения периода T в среднем столбце рассчитаны с помощью точной формулы (1); правый столбец получен с помощью простого приближенного выражения (14).

Обращаем внимание, что согласно приведенной таблице при больших амплитудах один цикл колебаний маятника происходит на протяжении нескольких периодов малых колебаний. В качестве задания для самостоятельной работы студентов целесообразно предложить проверку приведенных в таблице теоретических значений периода колебаний с помощью моделирующего эксперимента с использованием доступной в сети компьютерной программы [8].

Рассмотренные выше собственные колебания с предельно большими амплитудами в отсутствие трения происходят в тех случаях, когда при начальном возбуждении маятник получает энергию, чуть меньшую высоты потенциального барьера $E_m = 2mgl$ (см. рис. 1). Если маятник возбуждается из нижнего положения равновесия начальным толчком, начальная скорость $\dot{\varphi}(0)$ должна быть немного меньше $2\omega_0$. Если же $\dot{\varphi}(0) > 2\omega_0$, маятник совершает полные перевороты. Когда $\dot{\varphi}(0)$ лишь ненамного больше чем $2\omega_0$, также целесообразно изучать его движение, разделяя полный оборот на две стадии. При пересечении перевернутого положения и в малой окрестности этого положения движение маятника с высокой точностью можно описывать с помощью линеаризованного дифференциального уравнения (9). Остальная часть – почти замкнутый круговой путь – с хорошей точностью можно аппроксимировать известным аналитическим ре-

Табл. 1

Амплитуда φ_m (α_m)	T/T_0 (точное значение)	T/T_0 (приближенное)
175.000° (5.000°)	2.877664	2.876395
177.000° (3.000°)	3.202109	3.201597
179.000° (1.000°)	3.901065	3.900995
179.900° (0.100°)	5.366867	5.366866
179.990° (0.010°)	6.832737	6.832737
179.999° (0.001°)	8.298608	8.298608

шением (6) для лимитационного движения, аналогично тому, как это было сделано выше при изучении колебаний предельно большой амплитуды. Таким путем можно получить простую аналитическую формулу для периода переворотов маятника при значениях полной энергии, слегка превышающих $E_m = 2mgl$ (см. [7]).

5. ДРУГОЙ ВЫВОД ФОРМУЛЫ ДЛЯ ПЕРИОДА КОЛЕБАНИЙ ПРЕДЕЛЬНО БОЛЬШОЙ АМПЛИТУДЫ

В приведенном выше выводе выражения (14) для периода колебаний предельно большой амплитуды был выбран произвольно некоторый малый угол α_c для разделения всего движения маятника на стадии, описываемые разными аналитическими зависимостями. Другой подход к выбору условной границы, разделяющей движение на две стадии, заключается в выборе не малого угла α_c , а некоторой произвольной (достаточно малой) угловой скорости $\omega_c \ll \omega_0$, которую развивает маятник при движении от точки поворота α_m , где его угловая скорость равна нулю. Чтобы рассчитать продолжительность t_3 этой стадии движения, происходящего в окрестности перевернутого положения, можно воспользоваться полученным выше решением (11) линейного дифференциального уравнения (9), согласно которому

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{1}{2} \alpha_m \omega_0 (e^{\omega_0 t} - e^{-\omega_0 t}). \quad (15)$$

Подставляя $\dot{\alpha}(t_3) = \omega_c$ в (15) и принимая во внимание, что $e^{-\omega_0 t_3} \ll e^{\omega_0 t_3}$, находим:

$$\omega_0 t_3 = \ln \frac{2\omega_c}{\omega_0 \alpha_m}. \quad (16)$$

Дальнейшее движение к положению равновесия почти неотличимо от лимитационного движения. Поэтому для данной стадии движения зависимость угловой скорости $\dot{\alpha}(t) = -\dot{\varphi}(t)$ от времени можно принять такой же, как и для лимитационного движения. Эта зависимость дается выражением (7). Для вычисления длительности t_4 этой стадии можно подставить $\dot{\varphi}(t_4) = \omega_c$ в (7) и принять

во внимание, что $e^{-\omega_0 t_4} \ll e^{\omega_0 t_4}$. В результате получим:

$$\omega_0 t_4 = \ln \frac{4\omega_0}{\omega_c}. \quad (17)$$

Складывая t_3 из (16) и t_4 из (17), получаем в результате то же самое простое выражение (14) для периода колебаний с предельно большой амплитудой φ_m :

$$\begin{aligned} T = 4(t_3 + t_4) &= \frac{4}{\omega_0} \left(\ln \frac{2\omega_c}{\omega_0 \alpha_m} + \ln \frac{4\omega_0}{\omega_c} \right) = \\ &= \frac{2}{\pi} T_0 \ln \frac{8}{\alpha_m}. \end{aligned} \quad (18)$$

Отметим, что и здесь произвольно выбранная угловая скорость ω_c ($\omega_c \ll \omega_0$), которая была использована для разделения движения на стадии, описываемые различными приближенными закономерностями, выпадает из окончательного выражения (18).

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Старая задача о колебаниях простого жесткого маятника с амплитудами, приближающимися к 180° , рассмотрена на основе приближения, суть которого заключается в разделении полного цикла колебаний на несколько стадий. Большая часть почти замкнутого кругового пути маятника, совершающего колебания с амплитудой, близкой к 180° , с хорошей точностью аппроксимируется лимитационным движением, для которого существует решение в элементарных функциях. Остальная часть движения происходит в малой окрестности перевернутого положения и достаточно точно описывается с помощью линеаризованного уравнения, справедливого для новой переменной $\alpha = \pi - \varphi$. Точка разделения движения маятника на стадии, описываемые разными приближенными формулами, выбирается до некоторой степени произвольно, но этот произвол не сказывается на окончательном выражении для периода колебаний. Окончательная приближенная аналитическая формула (14) оказывается очень простой, и дает для периода колебаний с предельно большими амплитудами значения, весьма близкие

к результатам расчета на основе точной формулы (1), выражающей период в терминах полного эллиптического интеграла первого рода. И что не менее важно, использован-

ный здесь подход к проблеме больших колебаний способствует более глубокому физическому пониманию динамики нелинейных систем.

Литература

1. *Johannessen K.*, 2010. An approximate solution to the equation of motion for large-angle oscillations of the simple pendulum with initial velocity // *Eur. J. Phys.* **31** 511_18.
2. *Belendez A., Rodes J.J., Hernandez A. and Belendez T.*, 2009. Approximation for a large-angle simple pendulum period // *Eur. J. Phys.* **30** L25_8.
3. *Carvalhoes C.G., Suppes P.*, 2008. Approximations for the period of the simple pendulum based on the arithmetic-geometric mean // *Am. J. Phys.* **76** 1150_4.
4. *Lima F.M.S.*, 2009. Simple 'log formulae' for the pendulum motion valid for any amplitude // *Eur. J. Phys.* **29** 1091_8.
5. *Lima F.M.S., Arun P.*, 2006 An accurate formula for the period of a simple pendulum oscillating beyond the small angle regime // *Am. J. Phys.* **74** 892_5.
6. *Xin Y.Q. and Pei D.*, 2009. Comment on 'Approximation for a large-angle simple pendulum period' // *Eur. J. Phys.* **30** L79_82.
7. *Butikov E.*, 1999. The rigid pendulum_ an antique but evergreen physical model // *Eur. J. Phys.* **20** 429_41.
8. *Бутиков Е.И.*, 1996. Моделирование собственных колебаний и переворотов жесткого маятника <http://faculty.ifmo.ru/butikov/Applets/PendulumR.html> (дата обращения 25.02.2013).

Abstract

Large oscillations of a simple rigid pendulum with amplitudes close to 180 degrees are treated on the basis of a physically justified approach in which the cycle of oscillation is divided into several stages. The major part of the almost closed circular path of the pendulum is approximated by the limiting motion, while the motion in the vicinity of the inverted position is described on the basis of the linearized equation. The accepted approach provides additional insight into the dynamics of nonlinear physical systems. The final simple analytical expression gives the values for the period of large oscillations that coincide with high precision with the values given by the exact formula based on the complete elliptic integral of the first kind.

Keywords: Simple pendulum, phase trajectory, limiting motion, separatrix, linearized equation, computer simulation.

*Бутиков Евгений Иванович,
профессор физического факультета
СПбГУ,
eugene.butikov@gmail.com.*



Наши авторы, 2013.
Our authors, 2013.