

АЛГОРИТМЫ ФРАКТАЛЬНОГО АНАЛИЗА ИЗОБРАЖЕНИЙ

Аннотация

Рассматривается применимость метода модифицированной фрактальной сигнатуры к классификации изображений из двух различных предметных областей. Метод состоит в вычислении размерности Минковского для фрактальной поверхности, которая представляет собой график функции, построенный над заданным изображением по значениям интенсивности пикселей. Известно, что для непустых ограниченных множеств в евклидовом пространстве размерность Минковского совпадает с емкостной размерностью, но в отличие от последней вычисляется более эффективно. Приведенные примеры показывают, что метод позволяет достаточно надежно распознавать изображения рассматриваемых классов.

Ключевые слова: фрактальная размерность, размерность Минковского, емкостная размерность, анализ и классификация изображений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Цифровая обработка изображений охватывает широкий круг задач, для решения которых применяются как универсальные методы, так и ориентированные на определенные классы изображений. Эти методы предназначены для анализа и классификации изображений, позволяя выявлять в образцах сложные структуры, неочевидные закономерности и особенности, зачастую заметные лишь специалистам в данной области. Например, в биологии и медицине возможность автоматически обрабатывать большие наборы изображений, определять тип анализируемой ткани, обнаруживать опухоли, определять наличие каких-либо посторонних соединений может значительно повлиять на ход исследований, ускорить и облегчить процесс постановки диагноза.

Для сложных биологических систем мы чаще всего не имеем адекватных математических моделей, но результаты действия некоторой системы можно получить в виде изображения: например, изучать действие малой дозы вещества на препарат и фикси-

ровать его изображения, соответствующие различным дозам. Таким образом, изображение может рассматриваться как фазовый портрет наблюдаемой системы в определенный момент времени.

Очень часто изображения имеют сложную структуру, и для их исследования весьма полезными являются методы фрактального анализа. Фракталами называют множества с высокой степенью геометрической сложности. Вычисление их числовых характеристик – фрактальных размерностей – позволяет анализировать и классифицировать, например, снимки фармакологических препаратов, тканей живых организмов, разломов геологических пород. Нужно отметить, что, как правило, реальные изображения не укладываются в рамки одного фрактала, а представляют собой объединение нескольких фракталов (так называемые мультифракталы), где каждый фрактал имеет свою размерность, причем фрактальные множества расположены взаимопроникающим образом. Поэтому для характеристики подобных объектов разработаны методы мультифрактального анализа, которые позволяют оценивать не одну, а несколько фрактальных размерностей (спектр).

Рассмотрим метод модифицированной фрактальной сигнатуры, заключающийся в том, что изображению сопоставляется некоторая функция степени яркости полутонового изображения (функция градации серого), затем по ее значениям строится поверхность, определенным образом вычисляется площадь этой поверхности (фрактальная сигнатура) и с помощью этого значения приближенно вычисляется фрактальная размерность изображения. Этот метод был использован для анализа текстовых документов для выделения текста, графики и фона [6].

В данной работе мы рассматриваем метод модифицированной фрактальной сигнатуры и показываем его применимость к двум классам изображений, представляющим различные предметные области: это биомедицинские препараты и снимки летящих объектов, полученные с помощью радара. В обоих случаях изображение имеет фрактальную структуру, а вычисление соответствующей фрактальной размерности позволяет в одном случае классифицировать различные виды соединительных тканей, а в другом определять степень фокусировки объекта.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Приведем некоторые определения, относящиеся к понятию фрактальной размерности.

Мера Хаусдорфа

Пусть X – непустое подмножество евклидова пространства R^n и диаметр X определен следующим образом:

$diam X = \sup\{|x - y|, x, y \in X\}$. Рассмотрим $\{A_i\}$ – конечное или счетное ε -покрытие X , то есть $diam A_i \leq \varepsilon$ и $X \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, и возьмем некоторое неотрицательное число p .

Определим величину

$m_p(X, \varepsilon) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (diam A_i)^p \right\}$, где \inf берется по всем ε -покрытиям множества X . Для фиксированного p при убывании ε нижняя грань распространяется на все более узкий класс покрытий и, следовательно,

может лишь возрасти. Таким образом, существует предел (конечный или бесконечный) $m_p(X) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m_p(X, \varepsilon)$, который называется p -мерной мерой Хаусдорфа. Мера Хаусдорфа обобщает понятие длины, площади, объема. Известно, что для подмножеств R^n n -мерная мера Хаусдорфа с точностью до множителя есть n -мерная мера Лебега [2].

Размерность Хаусдорфа

Рассмотрим, как меняется p -мерная мера Хаусдорфа при изменении p . Если $r > p$ и $\{A_i\}$ – ε -покрытие X , то

$$\sum_{i=1}^{\infty} (diam A_i)^r \leq \varepsilon^{r-p} \sum_{i=1}^{\infty} (diam A_i)^p$$

и, следовательно, $m_r(X, \varepsilon) \leq \varepsilon^{r-p} m_p(X, \varepsilon)$. Переходя к пределу по ε , получаем, что если $m_p(X, \varepsilon)$ конечно, то мера Хаусдорфа $m_r(X) = 0$ при $r > p$. Известно [1], что существует точка перехода p_0 такая, что $m_p(X) = \infty$ при $p < p_0$ и $m_p(X) = 0$ при $p > p_0$. Число p_0 называется *размерностью Хаусдорфа* для X и обозначается $\dim_H X$.

Известно [2], что для открытых множеств и гладких поверхностей в евклидовом пространстве хаусдорфова размерность совпадает с топологической ($\dim_T X$). А вот для множеств более сложной структуры это не так. Мандельброт определил фрактальные множества как такие, для которых $\dim_H X > \dim_T X$. Известный пример фрактального множества – это стандартное канторово множество, для которого размерность Хаусдорфа равна $\ln 2 / \ln 3$, в то время как топологическая размерность равна 0.

Емкостная размерность

Вычисление размерности Хаусдорфа представляет собой непростую задачу, поэтому в практических применениях чаще используется класс размерностей, получивших название *box-counting*, так как для их определения нужно найти число элементов покрытия (boxes), необходимых для покрытия данного множества. Заметим, что от способа выбора покрытия будет зависеть и величина получаемой размерности.

Одной из наиболее известных в этом классе является *емкостная размерность*.

Пусть F – непустое ограниченное подмножество R^n , Ω – некоторое конечное ε -покрытие F и $N_\varepsilon(F) = |\Omega|$.

Нижнюю и верхнюю границу емкостной размерности определим, соответственно, следующим образом:

$$\underline{\dim}_B F = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log_2 N_\varepsilon(F)}{-\log_2 \varepsilon},$$

$$\overline{\dim}_B F = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log_2 N_\varepsilon(F)}{-\log_2 \varepsilon}.$$

Если нижняя и верхняя границы равны, то их общее значение называют *емкостной размерностью* F , то есть

$$\dim_B F = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log_2 N_\varepsilon(F)}{-\log_2 \varepsilon}.$$

Размерность Минковского

Непосредственное вычисление емкостной размерности по приведенной формуле редко используется в практических вычислениях, поскольку для определения числа $N_\varepsilon(F)$ требуется хранить данные о всех элементах покрытия. Поэтому мы введем еще одну размерность, которая при определенных условиях совпадает с емкостной, но вычисляется более экономным способом.

Пусть F – подмножество R^n . Тогда δ -параллельным телом $F(F_\delta)$ называется множество точек, удаленных от F не более, чем на δ :

$$F_\delta = \{x \in R^n : |x - y| \leq \delta, y \in F\}$$

Примеры δ -параллельных тел в R^3 :

- 1) если F – множество из одной точки, тогда F_δ – шар с объемом $Vol(F_\delta) = 4/3 \pi \delta^3$;
- 2) если F – отрезок прямой длины L , тогда F_δ – цилиндр с объемом $Vol(F_\delta) = \pi L \delta^2$;
- 3) если F – прямоугольник с площадью A , тогда F_δ – параллелепипед с объемом $Vol(F_\delta) = 2A\delta$.

Обозначим за $Vol^n(F_\delta)$ n -мерный объем F_δ . Если для некоторой константы D при $\delta \rightarrow 0$ предел $Vol^n(F_\delta) / \delta^{n-D}$ положителен и ограничен, то число D называется *размерностью Минковского* множества F и обозначается $\dim_M F$.

Известно [2], что размерность Минковского связана с емкостной размерностью следующим соотношением: $\dim_B F = \dim_M F$, где F – непустое ограниченное множество в R^n .

Например, в примере с прямоугольником при $D = 2$ конечный предел существует и равен $2A$.

3. МЕТОД МОДИФИЦИРОВАННОЙ ФРАКТАЛЬНОЙ СИГНАТУРЫ (MFS)

Первоначально данный метод был использован для анализа структуры текстовых документов [6]. Термин сигнатура в названии метода означает размерность и подчеркивает, что в данном методе вычисляется не традиционная емкостная размерность, а размерность Минковского.

Поскольку анализируемые текстовые документы были черно-белыми, в указанной работе строилась функция градации серого. Однако для анализа интересующих нас изображений это условие не является ограничительным.

Пусть $F = \{F_{ij}, i = 0, 1, \dots, K, j = 0, 1, \dots, L\}$ – представление полутонового изображения, где F_{ij} – уровень яркости для пикселя с координатами (i, j) . В этом представлении F фактически – функция целочисленных аргументов. Но если доопределить ее в точках с вещественными координатами (x, y) , $i < x < i + 1, j < y < j + 1$ соответствующим значением, то можно вычислить площадь поверхности графика построенной функции F . Если рассматривать множество значений F как фрактал, то площадь данной поверхности графика F может быть использована для вычисления ее фрактальной размерности. Заметим, что в задачах анализа изображений множество значений функции градации серого всегда непусто и ограничено в R^3 .

Техника построения δ -параллельного тела

Рассмотрим все точки, удаленные от поверхности графика функции градации серого на расстояние не более, чем δ . Эти точки образуют «одеяло» толщиной 2δ , покрывающее поверхность (с двух сторон), которое

является δ -параллельным телом для графика $F(i, j)$ функции градации серого.

Построим δ -параллельное тело для графика $F(i, j)$ с помощью определяемых ниже верхней поверхности $u_\delta(i, j)$ и нижней поверхности $b_\delta(i, j)$.

Положим $u_0(i, j) = b_0(i, j) = F(i, j)$ и определим итеративно поверхности для $\delta = 1, 2, \dots$:

$$u_\delta(i, j) = \max \left\{ u_{\delta-1}(i, j) + 1, \max_{|(m,n)-(i,j)| \leq 1} u_{\delta-1}(m, n) \right\},$$

$$b_\delta(i, j) = \min \left\{ b_{\delta-1}(i, j) - 1, \min_{|(m,n)-(i,j)| \leq 1} b_{\delta-1}(m, n) \right\}.$$

Некоторая точка $M(x, y)$ включается в δ -параллельное тело, если

$$b_\delta(i, j) < M(x, y) < u_\delta(i, j).$$

Заметим, что по построению δ -параллельные тела с меньшим δ содержатся в δ -параллельных телах с большим δ .

Объем δ -параллельного тела вычисляется через u_δ и b_δ :

$$Vol_\delta = \sum (u_\delta(i, j) - b_\delta(i, j)).$$

Приближение фрактальной размерности и фрактальная сигнатура

Пусть объем δ -параллельного тела равен Vol_δ . По определению размерности Минковского, если существует конечный

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} Vol_\delta / \delta^{3-D} = \beta,$$

то $D = \dim_M F = \dim_B F$. При достаточно малых δ получим $Vol_\delta \cong \beta \delta^{3-D}$. Площадь рассматриваемой фрактальной поверхности A_δ («площадь поверхности одеяла») называется фрактальной сигнатурой. Ее можно вычислить следующим образом:

$$A_\delta = Vol_\delta / 2\delta = \beta \delta^{3-D} / 2.$$

Таким образом, $D \approx 2 - \log_2 A_\delta / \log_2 \delta$, где D – фрактальная размерность.

На практике [5] фрактальную сигнатуру удобнее вычислять через значения объемов двух последовательных δ -параллельных тел по формуле:

$$A_\delta = \frac{Vol_\delta - Vol_{\delta-1}}{2}.$$

Заметим, что для собственно задачи классификации изображений достаточно вычислять только фрактальную сигнатуру, не вычисляя фрактальную размерность.

Заметим также, что в практических вычислениях может накапливаться погрешность, поэтому для более точной классификации изображений полезно выбирать несколько различных размеров ячеек разбиения.

Разобьем R на некоторое число n (параметр) квадратных ячеек R_k , $k \in [1, n]$. Для каждой ячейки R_k вычислим ее фрактальную сигнатуру A_δ^k . Суммируя фрактальные сигнатуры всех ячеек, получаем значение фрактальной сигнатуры всего изображения: $A_\delta = U_{k=1}^n A_\delta^k$ для данного значения параметра n .

Также в задачах сравнения изображений для повышения достоверности результатов классификации может оказаться полезным получать значения фрактальных сигнатур на отдельных участках изображения, получая тем самым некоторую карту и спектр характеристик изображения.

4. ПРИМЕР АНАЛИЗА ИЗОБРАЖЕНИЙ ТКАНЕЙ ЖИВОТНЫХ

Покажем применение метода MFS для вычисления фрактальных характеристик различных классов образцов тканей животных (рис. 1 a-f). Графики (рис. 1g) демонстрируют хорошую разделяемость значений фрактальных сигнатур. Но, как можно заметить, для двух изображений, относящихся к разным классам (рис. 1 b, c) полученные характеристики оказываются близкими. Поэтому один метод анализа не всегда может дать надежные результаты. Для большей достоверности часто применяют несколько различных методов и сопоставляют результаты. В частности, для показанных образцов в работе [3] метод MFS был дополнен методом вычисления спектра размерностей Реньи.

5. АНАЛИЗ ИЗОБРАЖЕНИЙ ЛЕТАЮЩИХ ОБЪЕКТОВ

Изображения, полученные с помощью радара (рис. 2), могут иметь разную степень

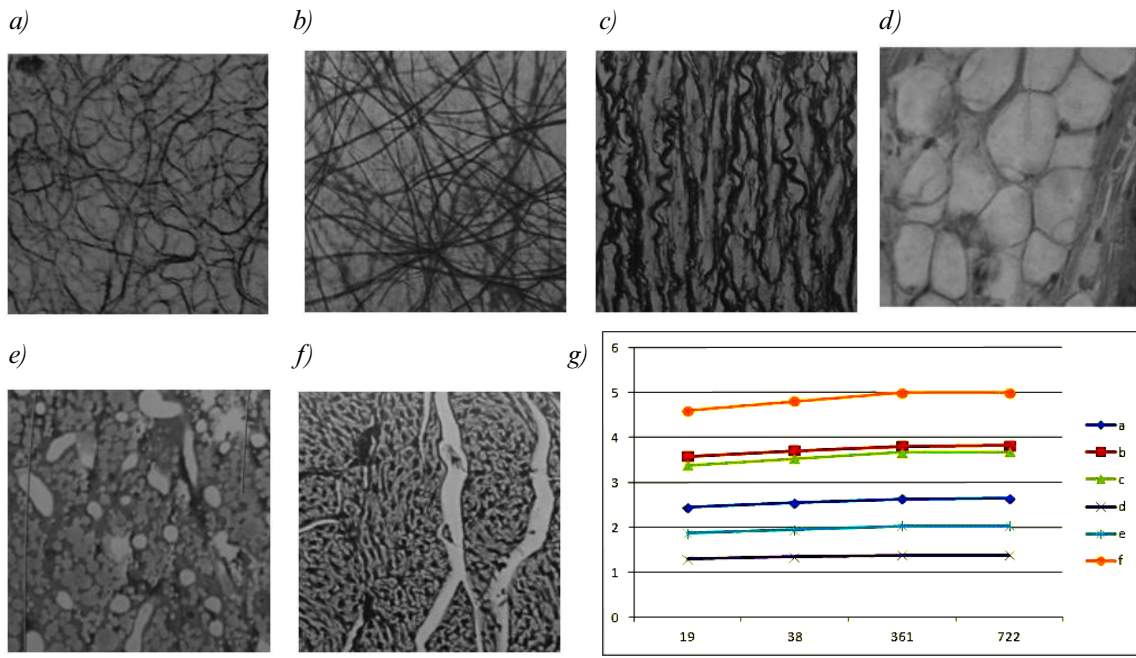


Рис. 1: *a-f* – образцы тканей, *g* – MFS тканей

фокусировки, так как наблюдаемый объект совершает сложное движение. В статье [4] реализован алгоритм автофокусировки, основанный на применении двумерного преобразования Фурье и вычислении его эн-

тропии. Отображение считается сфокусированным, если энтропия попадает в определенный интервал значений. Вычисление MFS позволяет дать еще один критерий для выбора наиболее сфокусированного изобра-

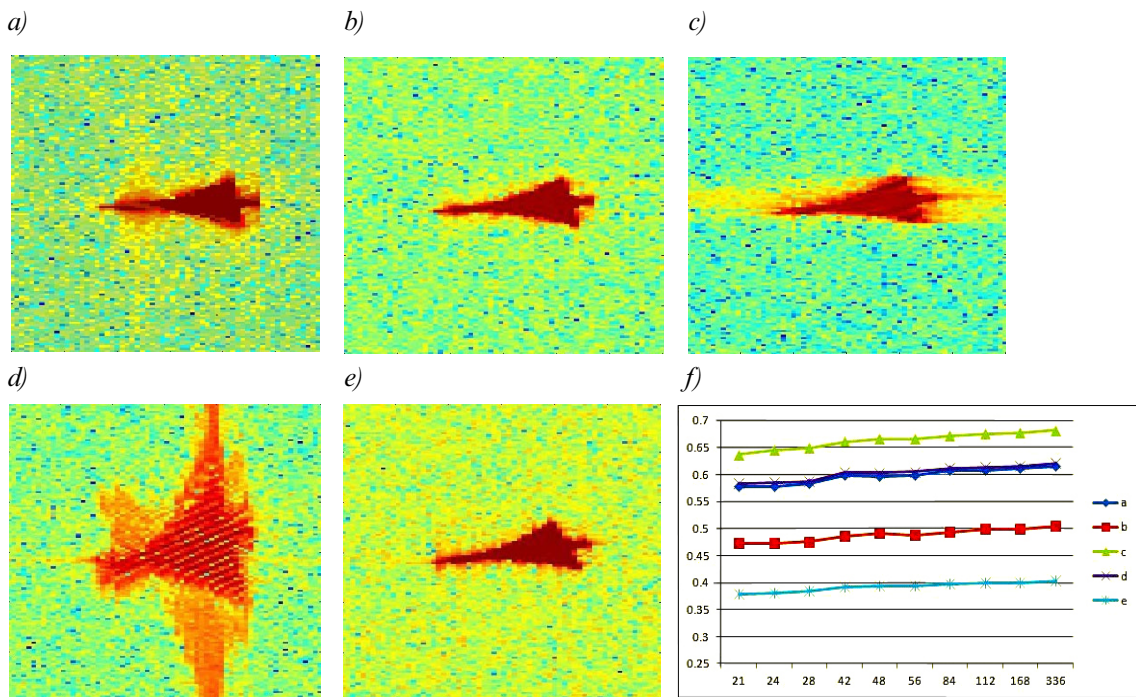


Рис. 2: *a-e* – изображения, полученные с помощью радара, *f* – MFS ISAR

жения – наименьшее значение фрактальной сигнатуры. Графики (рис. 2f) показывают, что таким изображением является e . Для

двух близких изображений (a и c) значения сигнатур оказываются близки.

Литература

1. П. Биллингсли. Эргодическая теория и информация. М., Мир, 1969.
2. Falconer K.J. Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications. John Wiley & Sons, 1990.
3. N. Ampilova, E. Gurevich, I. Soloviev. Application of Modified Fractal Signature & Regny Spectrum Methods to the Analysis of Biomedical Preparations Images. Proc. 6 Int. Conf. CEMA11, 6–8 Oct. 2011, Sofia, Bulgaria. P. 96–100.
4. E. Kallitsis, A. Karakasiliotis and P. Frangos. Combination of range profile alignment technique with autofocusing postprocessing algorithm for ISAR image optimization. Proc. of CEMA11, Sofia, Bulgaria, 6–8 October, 2011. P. 1–7.
5. S. Peleg, J. Naor, R. Hartley, and D. Avnir, Multiple Resolution Texture Analysis and Classification, IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence. Vol. 6, № 4. P. 518–523, July 1984.
6. Y. Y. Tang, Hong Ma, Dihua Xi, Xiaogang Mao, C. Y. Suen. Modified Fractal Signature (MFS): A New Approach to Document Analysis for Automatic Knowledge Acquisition. IEEE Trans. Knowledge and Data Eng. Vol. 9, № 5, 1997. P. 742–762.

Abstract

The applicability of the method of modified fractal signature to classify images of two different application domains is considered. The method is based on the calculation of the Minkovsky dimension for a fractal surface that is the graph of the gray-level function of the image. It is well known that for nonempty bounded sets in Euclidean space the Minkovsky dimension coincides with the capacity one, but it can be calculated more effectively. The given examples show that the method allows us to obtain reliable results for classes of images under consideration.

Keywords: fractal dimension, Minkovski dimension, capacity dimension, image analysis and classification.

*Ампилова Наталья Борисовна,
кандидат физико-математических
наук, доцент кафедры информатики
математико-механического
факультета СПбГУ,
ampilova@math.spbu.ru,*

*Соловьев Игорь Павлович,
кандидат физико-математических
наук, доцент кафедры информатики
математико-механического
факультета СПбГУ,
soloviev@math.spbu.ru*

© Наши авторы, 2012.
Our authors, 2012.