

СЕЧЕНИЯ ПУАНКАРЕ ПРИ ОПИСАНИИ ПОВЕДЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Аннотация

Неавтономные системы исследуются путём рассмотрения их карт Пуанкаре. Карты Пуанкаре используются для выявления периодических и субгармонических решений и для изучения систем, решения которых проявляют хаотическое поведение.

Ключевые слова: сечение Пуанкаре, нелинейная динамика, хаос, предельный цикл, странный аттрактор, вычислительные методы.

Метод фазовой плоскости широко используется для анализа поведения автономных систем, позволяя с помощью фазовых диаграмм выявить многочисленные важные черты поведения нелинейных систем [1, 2]. Например, замкнутые фазовые траектории соответствуют периодическим во времени решениям. Ситуация становится гораздо более сложной в случае неавтономных систем, когда расшифровка фазовых диаграмм представляет собой очень трудную задачу. Один из возможных путей в этом случае – это использование карт (или сечений) Пуанкаре [3, 4]. Такие карты позволяют заменить изучение неавтономных систем исследованием динамических систем, определенных положениями на фазовой плоскости в равномерно распределенные моменты времени, такие как $t = 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Достоинства данного метода становятся особенно впечатляющими, когда рассматриваются нелинейные системы, для которых неизвестны точные решения. В этом случае фазовые траектории рассчитываются численными методами, например, методом Рунге-Кутты. Существуют пакеты программ, позволяющих проводить построение карт Пуанкаре для подобных систем.

Принцип построения карт Пуанкаре для неавтономных систем, описываемых дифференциальным уравнением второго порядка,

состоит в следующем. В фазовом пространстве исследуемой системы рассматриваются поперечные сечения фазовых траекторий плоскостями $t = const$. Обычно в качестве временного интервала этих сечений берется период внешнего воздействия на систему. Точки пересечения фазовых траекторий с плоскостями $t = const$ указываются на одной плоскости (x, y) , которая называется сечением Пуанкаре. В результате возникает удобная для наглядного представления двумерная картина, которая содержит последовательность точек пересечения фазовых траекторий с различными плоскостями $t = const$. Это своего рода «дискретная орбита», показывающая (x, y) координаты начальной точки спустя один, два и так далее периодов внешнего воздействия на систему.

Проиллюстрировать картину Пуанкаре удобно на хорошо известном примере незатухающего гармонического осциллятора, совершающего вынужденные колебания. Пусть равновесное положение осциллятора определяется константой x_0 , тогда уравнение движения для осциллятора можно записать в виде:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2(x(t) - x_0) = F \cos t, \quad (1)$$

где F – положительная амплитуда приведенной вынуждающей силы, частота которой положена равной единице. Общее решение уравнения (1) при $\omega \neq 1$ дается выражением:

$$x(t) = x_0 + A \sin(\omega t + \psi) + \frac{F}{\omega^2 - 1} \cos t, \quad (2)$$

где A и ψ – произвольные постоянные. Для скорости с помощью (2) имеем:

$$v(t) = \omega A \cos(\omega t + \psi) - \frac{F}{\omega^2 - 1} \sin t, \quad (3)$$

Заметим далее, что дифференциальное уравнение второго порядка для неавтономной системы (1) можно свести к системе трех дифференциальных уравнений 1-го порядка для автономной системы:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v(t), \\ \dot{v}(t) &= F \cos(\varphi(t)) - \omega^2(x(t) - x_0), \\ \dot{\varphi}(t) &= 1. \end{aligned} \quad (4)$$

где φ – циклическая переменная (угол). Решения системы (4) даются выражениями (2) и (3), к которым добавляется уравнение:

$$\varphi(t) = t, \quad (5)$$

Переменные $x(t)$, $v(t)$, $\varphi(t)$ можно рассматривать как некоторые криволинейные координаты в трехмерном фазовом пространстве, параметрически задающие некоторую кривую в этом пространстве. Особенно наглядная кривая получается при использовании цилиндрических координат r , z , φ . Именно, если положить $z = v(t)$, $r = x(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, то траектория движения в трехмерном фазовом пространстве представляет собой линию, «намотанную» на тор. На рис. 1 приведены траектории для $\omega = 20$ (рис. 1 а) и $\omega = 1/20$ (рис. 1 б).

Движение точки в трехмерном фазовом пространстве можно представить как сово-

купность движений по двум окружностям с частотами $\Omega = 1$ и ω (рис. 1 а). Сечение Пуанкаре получается как сечение тора полуплоскостью (рис. 1 б).

Далее мы будем выбирать секущую плоскость соответствующую углу $\varphi = 0$, что соответствует моментам времени $t = 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Мы будем рассматривать частный случай $x_0 = 0$, тогда карта Пуанкаре определяется выражениями:

$$\begin{aligned} x_n &= x(2\pi n) = A \sin(2\pi\omega n + \psi) + \frac{F}{\omega^2 - 1}, \\ v_n &= v(2\pi n) = \omega A \cos(2\pi\omega n + \psi), \end{aligned} \quad (6)$$

$n = 0, 1, 2, \dots$

На рис. 2 и 3 показаны первые одиннадцать ($n = 0, 1, 2, \dots, 10$) положений точек карты Пуанкаре (x_n, v_n) на фазовой плоскости (x, v) для различных значений ω . Для простоты выбраны значения $A = F = 1$, $\varphi = 0$. Такие графики называют сечениями Пуанкаре.

Теперь забудем, что нам известно выражение (2) для $x(t)$, и попробуем выяснить, какую информацию можно извлечь, зная только уравнение (1) и показанные на рисунках сечения Пуанкаре. Обратим внимание, что при $\omega = 2$ и $\omega = 3$ сечения Пуанкаре состоят из одной точки на фазовой плоскости. Это свидетельствует о том, что, начиная с $t = 0$, каждое увеличение значения t на 2π приводит к возвращению фазовой траектории в ту же точку на фазовой плоскости. Поэтому уравнение (1) имеет решение с периодом 2, что можно описать следую-

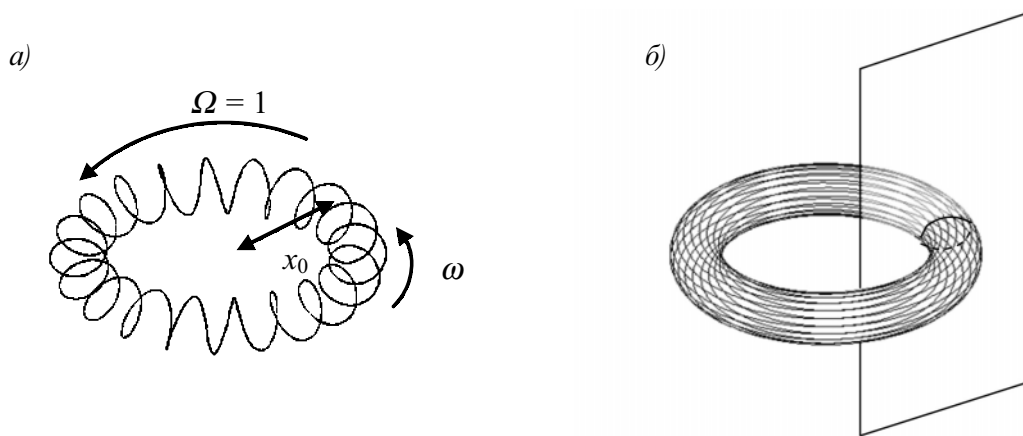


Рис. 1

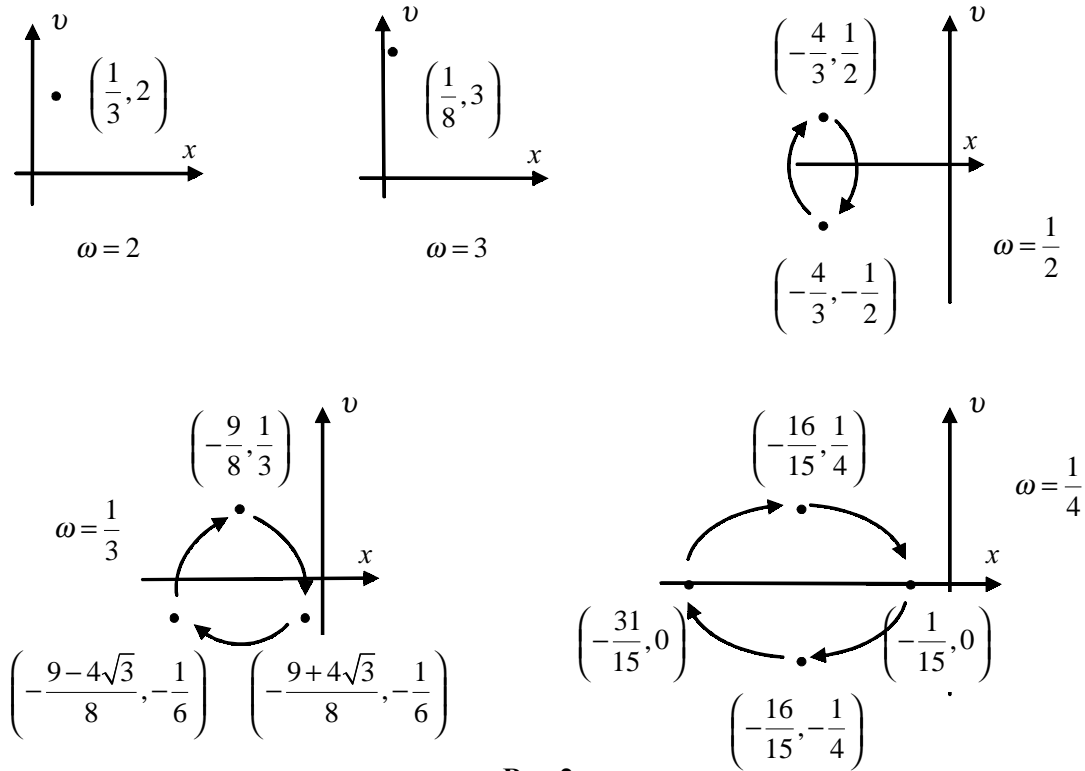


Рис. 2

шим образом: пусть при $\omega = 2$ функция $x(t)$ является решением (1) с начальными условиями $x(0) = 1/3, v(0) = 2$ и пусть $X(t) = x(t + 2\pi)$. Поскольку сечение Пуанкаре состоит из единственной точки $(1/3, 2)$, то $X(0) = x(2\pi) = \frac{1}{3}$ и $\dot{X}(0) = \dot{x}(2\pi) = 2$. Таким образом функции $x(t)$ и $X(t)$ имеют одинаковые начальные значения при $t = 0$ и то же справедливо для производных этих функций. Далее, поскольку $\cos t$ является 2π периодической функцией, то справедливо:

$$\begin{aligned} \ddot{X}(t) + \omega^2 X(t) &= \\ &= \ddot{x}(t + 2\pi) + \omega^2 x(t + 2\pi) = \\ &= \cos(t + 2\pi). \end{aligned}$$

Это означает, что функции $x(t)$ и $X(t)$ должны совпадать на всем интервале $[0, \infty)$, поскольку справедлива теорема единственности решения дифференциального уравнения при заданных начальных условиях [3].

Таким образом, $x(t) = X(t) = x(t + 2\pi)$ для всех $t \geq 0$: функция $x(t)$ является 2π -периодичной. С помощью таких же аргументов можно убедиться в том, что при $\omega = 1/2$ имеется решение с периодом 4π , которое осциллирует между двумя точками на фазовой плоскости, показанными на сечении Пуанкаре

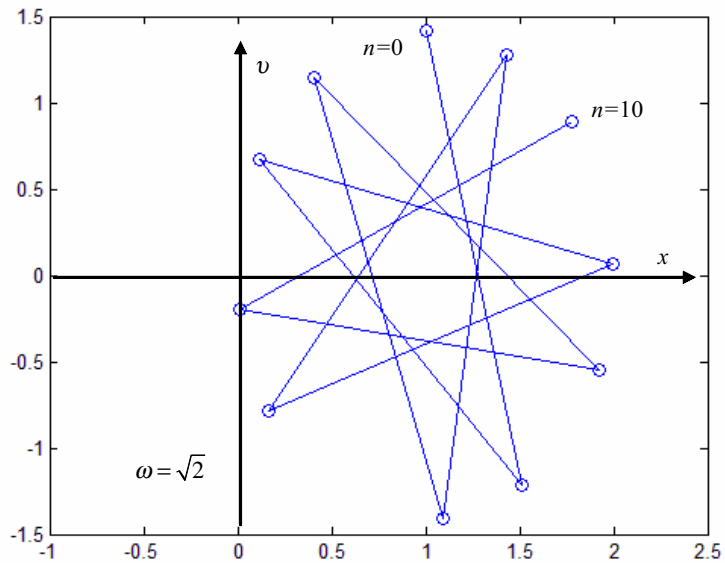


Рис. 3

каре. При $\omega = 1/3$ имеется решение с периодом 6π , обращающееся между тремя точками на сечении Пуанкаре, при $\omega = 1/4$ имеется 8π – периодическое решение, обращающееся между четырьмя точками. Эти решения называются субгармоническими.

А вот случай $\omega = \sqrt{2}$ приводит к совершенно иному результату (рис. 3). На сечении Пуанкаре видно, что точки на фазовой плоскости не повторяются (линии, соединяющие точки проведены, чтобы был понятен порядок следования этих точек при увеличении значения n). Может быть, рассмотрено слишком мало точек? Оказывается, что благодаря тому, что $\sqrt{2}$ – число иррациональное, любое новое число n приводит к новой точке на сечении Пуанкаре. Все эти точки лежат на эллипсе. Действительно при $\omega = \sqrt{2}$, $A = F = 1$, $\varphi = 0$ имеем:

$$\begin{aligned} x_n &= \sin(2\sqrt{2}\pi n) + 1, \\ v_n &= \sqrt{2} \cos(2\sqrt{2}\pi n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Отсюда следует, что каждая точка с координатами (x_n, v_n) лежит на эллипсе, определяемом уравнением:

$$(x-1)^2 + \frac{v^2}{2} = 1.$$

Мы рассматривали 2π периодические решения уравнения (1), поскольку вынуждающая сила имеет период, равный 2π . При этом обнаружались субгармоники $2 \cdot 2\pi$, $3 \cdot 2\pi$, $4 \cdot 2\pi$ при значениях ω , равных $1/2$, $1/3$, $1/4$ соответственно. При иррациональ-

ных значениях ω точки на сечениях Пуанкаре не повторяются, но лежат на гладких кривых, уравнения для которых могут быть найдены. Это справедливо для случая, когда отсутствует затухание движения осциллятора в отсутствие вынуждающей силы.

При наличии затухания у осциллятора ситуация совершенно иная. Рассмотрим уравнение вынужденных колебаний при учете затухания:

$$\ddot{x}(t) + 2b\dot{x}(t) + \omega^2(x(t) - x_0) = F \cos t, \quad (7)$$

где b – положительная константа. При условии $b^2 < 4\omega^2$ общее решение уравнения (7) имеет вид:

$$\begin{aligned} x(t) &= A \exp(-bt) \sin(\sqrt{\omega^2 - b^2} \cdot t + \varphi) + \\ &+ \frac{F}{\sqrt{(\omega^2 - 1)^2 + 4b^2}} \sin(t + \theta), \quad (8) \end{aligned}$$

где $\operatorname{tg} \theta = \frac{\omega^2 - 1}{2b}$, а A и φ – произвольные постоянные. Построим карту Пуанкаре для значений $t = 2\pi n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. Выберем для расчета значения $b=0,11$, $\omega = A = F = 1$, $\varphi = 0$. Поскольку $\operatorname{tg} \theta = \frac{\omega^2 - 1}{2b} = 0$, то выберем значение $\theta = 0$. Результаты расчета соответствующей карты Пуанкаре приведены на рис. 4.

Точками показаны соответствующие значения $n = 0, 1, 2, \dots$, а кружком на оси v обозначено значение $x_n = 0$, $v_n \approx 4,545$, к которому стремятся x_n и v_n после некоторого достаточно большого числа итераций. Можно предположить, что существует 2π – периодическое решение, соответствующее выбранным значениям A и φ . Это действительно так, как следует из выражения (8) при $A = 0$.

Имеет место существенное различие между сечениями Пуанкаре для уравнений (1) и (7). На рис. 2 и 3 положение всех точек зависит от выбранных начальных значений ($A = 1$, $\varphi = 0$). На рис. 4 положение первых нескольких точек зависит от начальных условий, однако положение предельной точки от них не зависит. Это характерная черта уравнений, содержащих затухание, причем

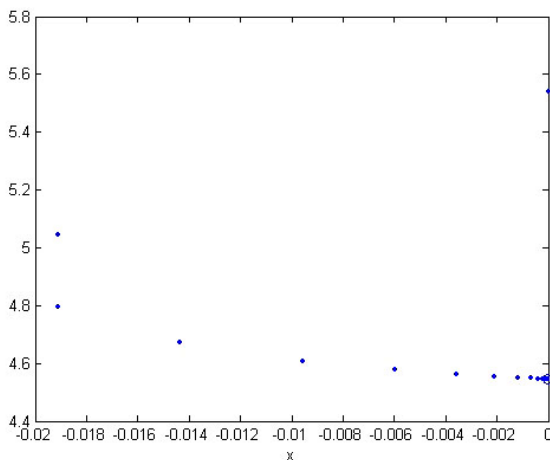


Рис. 4

для более сложных уравнений, чем (7), характерны не отдельные предельные точки, а более сложные объекты. Так, для уравнения:

$$\ddot{x}(t) + 0,22\dot{x}(t) + x(t) = \cos t + \cos(\sqrt{2}t) \quad (9)$$

характерно предельное множество в виде эллипса, показанного на рис. 5 (кружком обозначена начальная точка).

Предельные множества в виде отдельных точек или предельных циклов получили название *аттракторов*. В случае более сложных объектов, чем осциллятор, предельные множества могут иметь более сложный вид. Поведение таких систем называется хаосом, а соответствующие предельные множества называются *странными аттракторами*. Проявление динамического хаоса наблюдается в системах, которые заведомо известны как детерминированные, например, такие как течение воды в турбулентном потоке, движение воздушных масс в атмосфере и т. д. Подобные системы являются детерминированными в том смысле, что они

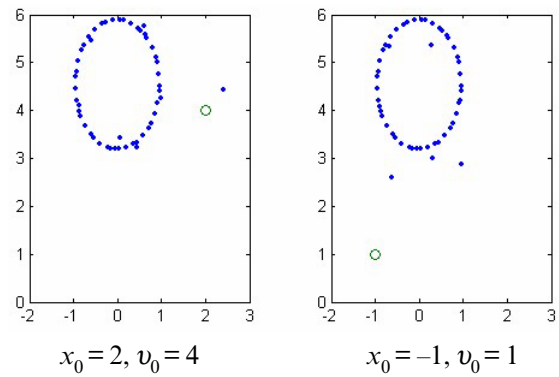


Рис. 5

подчиняются законам физики. Но это не означает, что их поведение предсказуемо. Малое изменение начальных условий может приводить к радикальным изменениям поведения системы.

Проиллюстрировать хаотическое поведение системы можно на примере уравнения Дуффинга [5]:

$$\ddot{x}(t) + 2b\dot{x}(t) - x(t) + x^3(t) = F \sin(\gamma t). \quad (10)$$

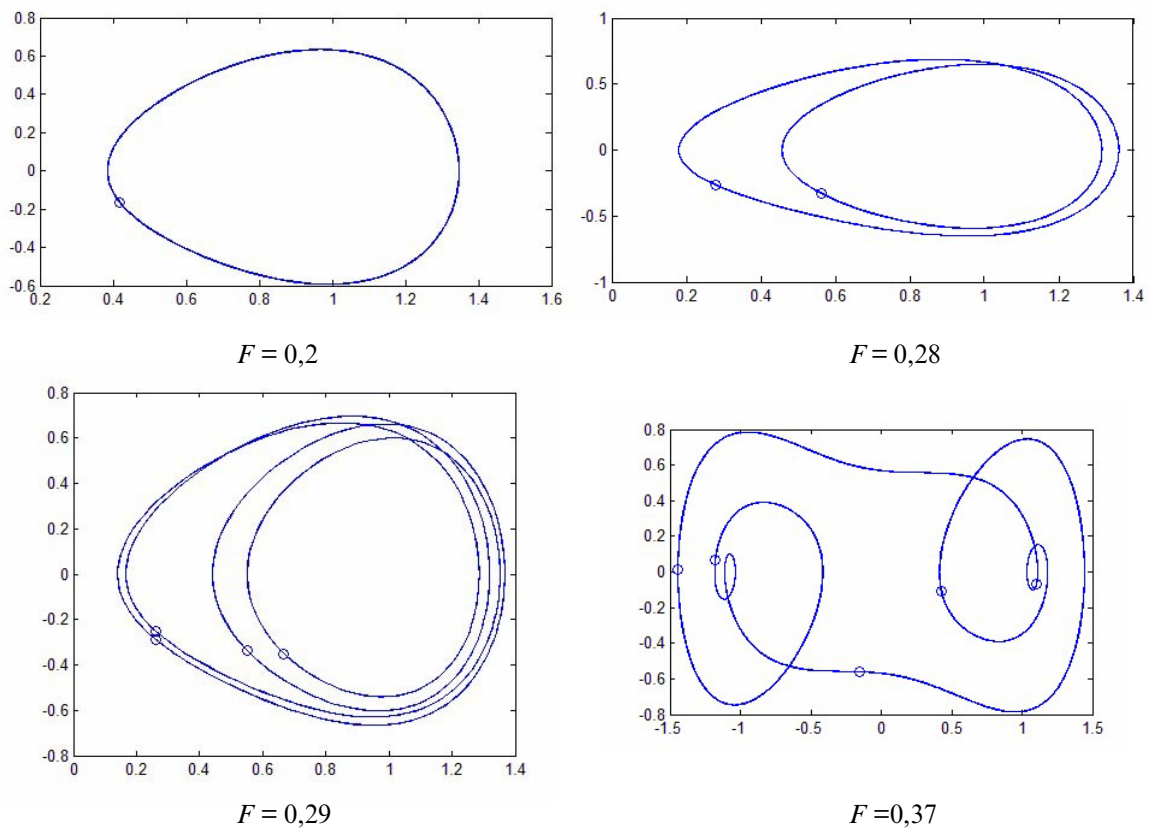


Рис. 6

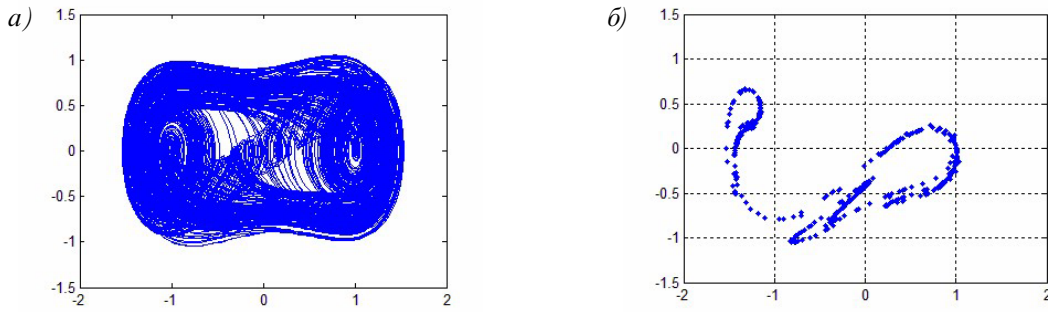


Рис. 7

Поскольку решение уравнения (8) не может быть записано в явном виде, то построение карты Пуанкаре придется выполнить путем численного решения для заданных начальных значений и нахождения значений для $x(2\pi n/g)$ и $v(2\pi n/\gamma) = \dot{x}(2\pi n/\gamma)$. Действительно, поскольку внешняя сила $2\pi n/\gamma$ -периодична, то следует искать $2\pi n/\gamma$ -периодические решения. На рис. 6 показаны сечения Пуанкаре при $b = 0,15$ и $\gamma = 1,2$ для случаев $F = 0,2$, $F = 0,28$, $F = 0,29$, $F = 0,37$.

Для наглядности точки сечения Пуанкаре нанесены на фазовые траектории, что позволяет понять последовательность следования этих точек во времени.

Видно, что при увеличении значения F характер карт Пуанкаре изменяется. При $F = 0,2$ существует $2\pi/\gamma$ – периодическое решение. При $F = 0,28$ появляется субгармоника с периодом $4\pi/\gamma$, а при $F = 0,29$ и $F = 0,37$ существуют субгармоники с периодами $8\pi/\gamma$ и $10\pi/\gamma$ соответственно. Все драматически преобразуется при $F = 0,5$. Теперь уже нет ни $2\pi/\gamma$ – периодического решения, ни субгармоник. Сечение Пуанка-

ре для этого случая ($n = 500$) показано на рис. 7б, а на рис. 7а приведена фазовая траектория. Как видно из рисунков, фазовая траектория в этом случае не несет большой информации, при увеличении числа точек фазовая траектория практически полностью заполняет некоторую область пространства. В то же время сечение Пуанкаре имеет характерную структуру. При этом, если исключить несколько точек с малыми значениями n , которые соответствуют начальному режиму с установлением колебаний, структура точек сечения Пуанкаре не зависит от начальных условий. Сложный вид этой структуры свидетельствует о том, что это действительно странный аттрактор [3]. Отметим, что вид сечения Пуанкаре изменяется, если построить различные сечения, например, взять $t = (2\pi n + \pi/2)/\gamma$, $n = 0,1,2, \dots$

Рассмотрим странный аттрактор для вынужденных колебаний физического маятника, описываемого уравнением:

$$\ddot{x}(t) + 2b\dot{x}(t) + \sin(x(t)) = F \cos t, \quad (11)$$

в котором $x(t)$ соответствует углу между осью симметрии маятника и вертикалью. На рис. 8 показано сечение Пуанкаре для значений $F = 2,7$ и $b = 0,11$, полученное при использовании примерно 5000 точек. Отметим определенную цикличность картины – линии, начинающиеся при $x = -\pi$, являются продолжениями линий, заканчивающихся при $x = \pi$.

Сечения Пуанкаре для уравнения Дуффинга и физического маятника демонстрируют не только странный аттрактор, но и явление детерминированного хаоса. Малые изменения в начальных условиях приводят

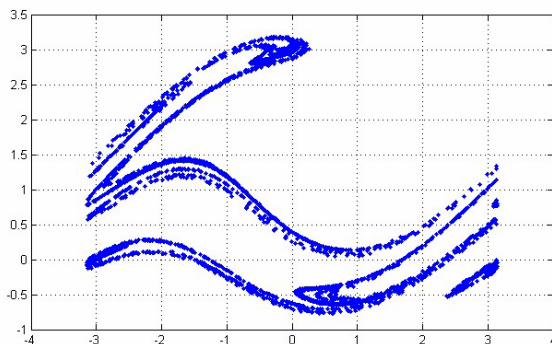


Рис. 8

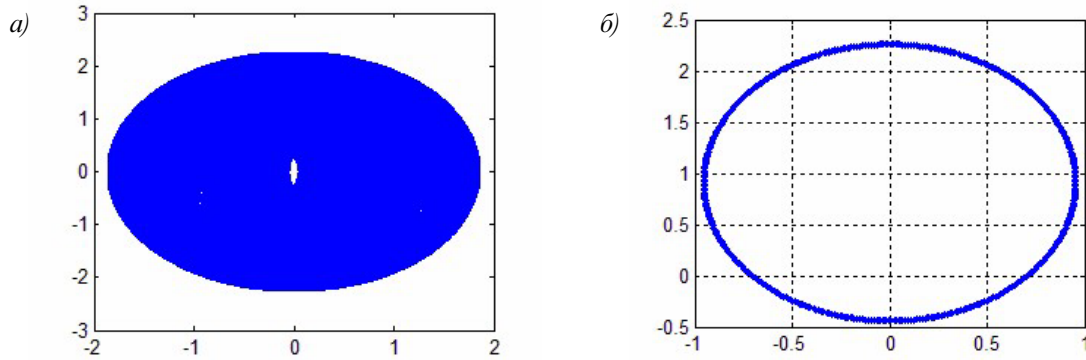


Рис. 9

к огромным изменениям поведения решений уравнений. Как писал еще А. Пуанкаре, «...Может случиться, что небольшие различия в начальных условиях вызовут огромные изменения в протекании явления. Маленькая ошибка в прошлом приводит к чудовищной ошибке в дальнейшем. Предсказания становятся невозможными» [3].

Такое поведение невозможно для систем, описываемых уравнениями (1) и (5). Однако два решения уравнения Дуффинга при $F = 0,5$, соответствующих даже очень близким значениям начальных условий, обязательно сильно разойдутся при увеличении t . И, хотя они оба, в конце концов, выходят на один и тот же странный аттрактор, их положения на этом аттракторе могут быть локализованы далеко друг от друга.

Исследование решений нелинейных уравнений показывает, что сечение Пуанкаре, соответствующее странному аттрактору, имеет специфическую структуру, описываемую понятием *фрактал* и имеющую дробную размерность, лежащую в интервале между значением 1 (длина линии) и 2 (площадь поверхности) [6]. Именно сечение Пуанкаре позволяет наглядно показать, что решение соответствует странному аттрактору. Для сравнения приведем фазовую диаграмму и сечение Пуанкаре для слегка измененного уравнения (9):

$$\ddot{x}(t) + 0,22\dot{x}(t) + x(t) = 0.2 \cos t + \cos(\sqrt{2}t)$$

после некоторого периода времени, соответствующего режиму установления (рис. 9а), и сечение Пуанкаре для $n = 500$ (рис. 9б).

Как видно из рисунка, фазовая диаграмма подобно фазовой диаграмме рис. 7а практически полностью заполняет некоторую область фазового пространства. Однако сечение Пуанкаре показывает, что в данном случае аттрактор есть линия, а именно эллипс.

В заключение отметим, что предельные циклы в виде странных аттракторов характерны не только для неавтономных систем. Разнообразные примеры систем различной природы, предельным циклом для которых является странный аттрактор, можно найти в [6]. Одна из простейших механических систем, описывающая автоколебания вследствие сил сухого трения, предельным циклом которой является странный аттрактор, рассмотрена в статье [7]. Схема автоколебательного устройства изображена на рис. 10. На стержне A закреплен груз B , который скользит по ленте транспортера, движущейся со скоростью v (устройство, похожее на самописец). Стержень может поворачиваться (угол поворота φ) и удерживается в рав-

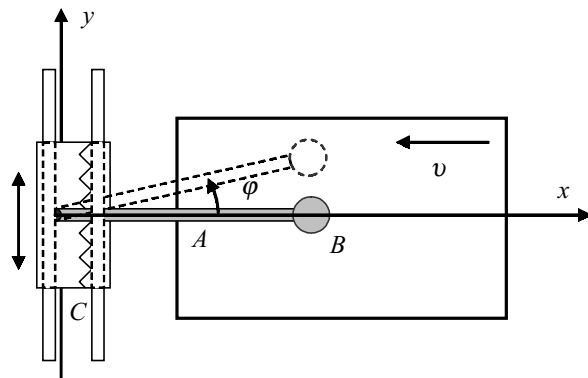


Рис. 10

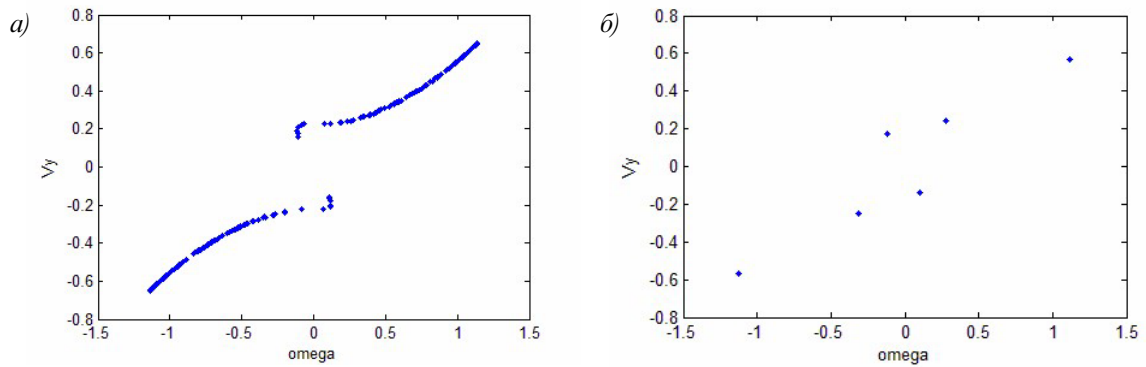


Рис. 11

новесном (симметричном) положении пружины. Стержень с пружиной закреплен на «каретке» C , которая может без трения скользить по направляющим, перпендикулярным ленте. Автоколебательная система имеет две степени свободы, однако в силу трансляционной симметрии координата каретки y не входит в систему уравнений. Вследствие этого, колебания системы описываются системой из 3 дифференциальных уравнений 1-го порядка, в которой переменными, зависящими от времени, являются φ , $\omega = \dot{\varphi}$, $V_y = \dot{y}$. Такая система уравнений является минимальной системой, для которой возможны хаотические движения. Численный эксперимент показывает [7], что в случае, когда сила упругости пружины нелинейно зависит от угла и сила сухого трения зависит от относительной скорости тела и ленты, в системе могут реализовываться как периодические колебания, так и хаотические колебания, в зависимости от скорости движения ленты.

В данном случае фазовое пространство трехмерное, и сечение Пуанкаре является множеством точек пересечения фазовой траектории любой поверхностью, в частности, плоскостью. С учетом симметрии удобно, например, рассмотреть сечение плоскостью, определяемой равенством $\varphi = 0$. Такое сече-

ние Пуанкаре для хаотических колебаний приведено на рис. 11 а, а для периодических колебаний на рис. 11 б. Как видно из рисунка, периодическому движению соответствует система из 6 точек, симметричная относительно поворота графика на 180° , что и должно быть вследствие симметрии физической системы. Сечение Пуанкаре для хаотических колебаний построено при расчете приблизительно 100000 точек и, тем не менее, не является строго симметричным относительно поворота графика. Это – еще одно свойство странного аттрактора – несмотря на симметрию уравнений, полностью симметричная картина сечения Пуанкаре не может быть получена в каком-либо пределе, хотя визуально такая симметрия будет наблюдаться при увеличении числа точек.

Так же, как и в случае построения сечений Пуанкаре при периодическом воздействии на систему, вид сечений Пуанкаре для автономной системы зависит от выбора той или иной переменной и значений этой переменной, для совокупности которых производится построение. В вышеприведенном примере можно, например, построить карту Пуанкаре, в которой по осям отложены переменные φ и V_y , а точки карты Пуанкаре вычисляются при значениях $\omega = 0$.

Литература

1. Бордовский Г.А., Кондратьев А.С., Чоудери А.Д.Р. Физические основы математического моделирования. М.: Academia, 2005.
2. Кондратьев А.С., Ляцев А.В. Физика, задачи на компьютере. М.: Физматлит, 2008.
3. Kent Nagle R., Edward B. Saff. Fundamentals of Differential Equations. Addison- Wesley Publishing Company, 1993.

4. *Blanchard P., Devaney R.L., Hall G.R.* Differential equations. Brooks/Coll, 2002.
5. *Кондратьев А.С., Ляцев А.В.* Компьютерное моделирование при изучении физики. Вынужденные колебания нелинейного осциллятора // Компьютерные инструменты в образовании, 2005. № 2. С. 66–71.
6. *Грищенко В.Т., Мацпура В.Т., Снарский А.А.* Введение в нелинейную динамику: Хаос и фракталы. М.: Изд. ЛКИ, 2007.
7. *Ляцев А.В.* Странный аттрактор в простейшей механической системе // Компьютерные инструменты в образовании, 2010. № 6. С. 57–66.

Abstract

Nonautonomous systems are studied by considering a Poincaré map for the system. A Poincaré map is used to detect periodic and subharmonic solutions and to study systems whose solutions exhibited chaotic behavior.

Keywords: Poincaré section, nonlinear dynamics, chaos, limit cycle, strange attractor, computational methods.

*Кондратьев Александр Сергеевич,
академик РАО, доктор физико-
математических наук, профессор
кафедры методики обучения физике
РГПУ им. А.И. Герцена,
Kondrat6125@mail.ru,*

*Ляцев Александр Викторович,
доктор физико-математических
наук, профессор, заведующий
кафедрой методики обучения физике
РГПУ им. А.И. Герцена.
urt_eno@mail.ru*



Наши авторы, 2012.
Our authors, 2012.