



УДК 621.396, 519.2, 550837

*Егоров Владимир Алексеевич,
Кондыбаев Нурлан Сакенович*

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ АЛГОРИТМА КЕЙПОНА В ЗАДАЧАХ ПЕЛЕНГАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ АКТИВНЫХ ПОМЕХ

Аннотация

Проведено математическое исследование и исследование с помощью компьютерного моделирования алгоритма Кейпона. В частности, получены условия линейной независимости и ортогональности сигнальных векторов и векторов координат помех.

Ключевые слова: радиолокация, алгоритм Кейпона, ковариационная матрица, функция рельефа, независимые координаты, ортогональные векторы, собственные числа, собственные векторы, решетка, статистическое моделирование.

ВВЕДЕНИЕ

Предполагается, что в области наблюдения радиолокационной станции находятся K источников активных помех с известными угловыми (сферическими) координатами. Источники помех излучают электромагнитные сигналы определенной частоты с нормально распределенными амплитудами, дисперсии которых определяют мощности сигналов. Рассматривается задача оценивания координат источников помех на основе исследования ковариационной матрицы «вектора наблюдений» L на выходе радиолокационной станции. Чтобы описать этот вектор, остановимся на некоторых конструктивных особенностях рассматриваемой станции.

Основной ее частью является прямоугольная матрица (решетка), состоящая из элементарных антенн, которые могут работать как на излучение, так и на прием сигнала. Эта матрица разделена на одинаковые прямоугольные подматрицы (подрешетки) размера $(t \times s)$. Решетка содержит n строк и m столбцов подрешеток. Сигналы с излучателей внутри подрешеток суммируются, поэтому статистической обработке могут быть подвергнуты только суммарные выходы из подрешеток. В силу шумовых эффектов в элементарных антеннах, выходы из подрешеток являются суммой суммарного сигнала в подрешетках и небольшого белого шума. Выходные сигналы из подрешеток образуют упомянутый ранее случайный вектор L . Таким образом, предполагается, что «случайность» вектора L связана со случайностью самих сигналов и с наличием шумовых эффектов в антеннах.

Чтобы не усложнять изложения, в этой работе мы не будем определять обобщенные координаты и описывать их связь со сферическими или другими угловыми координатами, что проделано в известных работах (см. [1, 2]), а будем пользоваться приведенными в этих

© Егоров В.А., Кондыбаев Н.С., 2011

работами известными формулами, выражающими элементы исследуемой ковариационной матрицы в виде функций от обобщенных координат.

Известно [1], что если имеется только одна активная помеха с обобщенными угловыми координатами ψ, θ (по горизонтали и по вертикали), то ковариационная матрица вектора L равна

$$R = \sigma_1^2 S S^H + \sigma^2 E.$$

Здесь

$$S = \{F(\psi, \theta, p, q) : p = 0, q = 0, \dots, n-1, p = 1, q = 0, \dots, n-1, \dots, p = m-1, q = 0, \dots, n-1\}, \quad (1)$$

$$F(\psi, \theta, p, q) = \exp[j(\psi sp + \theta tq)] \frac{\sin\left(\frac{\psi s}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\psi}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \stackrel{def}{=} \exp[j(\psi sp + \theta tq)] v,$$

где σ_1^2 – дисперсия (мощность) излучения помехи, σ^2 – дисперсии шумов в подрешетках, которые предполагаются одинаковыми. Фигурные скобки в (1) указывают на то, что S – это вектор размерности mn , p соответствует нумерации подрешеток по горизонтали, q – нумерации по вертикали. Формула (1) также определяет нумерацию подрешеток основной решетки станции.

Если имеется K независимых помех с обобщенными угловыми координатами ψ_i, θ_i , $i = 0, \dots, K-1$, то ковариационная матрица R вектора L принимает вид

$$R = \sum_{i=0}^{K-1} R_i + V, \quad (2)$$

где $R_i = \sigma_i^2 S_i S_i^H$ (σ_i^2 – мощность сигнала от i -ой помехи), $V = \sigma^2 E$,

$$S_i = \{F(\psi_i, \theta_i, p, q) : p = 0, q = 0, \dots, n-1, p = 1, q = 0, \dots, n-1, \dots, p = m-1, q = 0, \dots, n-1\}.$$

Определим приведенные мощности помех по формулам $\omega_i^2 = \sigma_i^2 v_i^2$. Тогда (2) примет вид

$$R = \sum_{i=0}^{K-1} \omega_i^2 T_i T_i^H + \sigma^2 E = \bar{R} + \sigma^2 E, \quad T_i = \{\exp[j(\psi_i sp + \theta_i tq)]\}, \quad i = 0, \dots, K-1, \quad (3)$$

где \bar{R} – ковариационная матрица выходных сигналов без учета шума на подрешетках.

В 1969 году Дж. Кейпон предложил новый метод оценивания координат помех, основанный на анализе ковариационной матрицы R . По аналогии с этим методом мы строим вектор поиска S по формуле

$$S = \{\exp(j(\psi sp + \theta tq))\}. \quad (4)$$

Далее строится так называемая функция рельефа переменных ψ, θ

$$\Phi = \frac{1}{S^H R^{-1} S}. \quad (5)$$

Как и в алгоритме Кейпона, в качестве оценок обобщенных координат помех выбираются координаты ψ, θ , соответствующие резко выделяющимся наибольшим локальным максимумам функции рельефа. Обоснование самого алгоритма Кейпона на физическом уровне приведено в [1–4]. В нашей работе исследуются некоторые математические свойства функции (5), влияющие на эффективность метода.

Отметим, что имеется возможность за счет изменения фаз сигналов ориентировать станцию на определенную область пространства. Математически это сводится к тому, что мы можем в разные точки пространства помещать начало координат. Это позволяет в формулах

(5) рассматривать лишь относительно небольшие области в окрестности начала обобщенных координат. Поэтому можно считать, что имеется взаимно однозначное соответствие между векторами T и обобщенными координатами ψ, θ .

Ниже для облегчения понимания излагаемого материала будем в нужных местах формулировать математические предложения, доказательства которых поместим в отдельном параграфе.

ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ РЕЛЬЕФА

Рассмотрим часть ковариационной матрицы без шумового слагаемого $\bar{R} = \sum_{i=0}^{K-1} \omega_i^2 T_i T_i^H$ и линейное пространство H , порожденное векторами $T_i, i = 0, 1, \dots, K-1$. Пространство H называется сигнальным пространством, а его ортогональное дополнение – шумовым пространством. Известно, что размерность сигнального пространства и ранг матрицы \bar{R} совпадают. С практической точки зрения наибольший интерес представляет случай, когда векторы T_0, \dots, T_{K-1} линейно независимы. Действительно, в противном случае координаты хотя бы одной из помех невозможно будет оценить, поскольку по крайней мере один из этих векторов T_{i_0} можно будет представить в виде линейной комбинации остальных векторов, и после пересчета приведенных мощностей ω_i^2 матрицы \bar{R}, R не будут зависеть от T_{i_0} .

Следующий результат указывает на то, что независимость векторов T_0, \dots, T_{K-1} встречается достаточно часто.

Пусть векторы $T_0', T_1', \dots, T_{K-1}'$ строятся путем вычеркивания из векторов T_0, T_1, \dots, T_{K-1} компонент, для которых нарушаются неравенства $p, q \leq K-1$. Очевидно, из линейной независимости векторов $T_0', T_1', \dots, T_{K-1}'$ следует линейная независимость векторов T_0, T_1, \dots, T_{K-1} .

Теорема 1. а) Пусть $K < M = \min(n, m)$. Для некоторого набора координат помех $(\psi_i, \theta_i), 0 \leq i \leq K-1$, векторы $T_0', T_1', \dots, T_{K-1}'$ линейно независимы тогда и только тогда, когда все они различны.

б) Пусть $m \geq n$, и для всех целых $l, i \leq m$, при всех целых k выполняются соотношения $(\psi_l - \psi_i)t \neq 2\pi k$. Тогда векторы линейно независимы при $K = m$. Если $\psi_i = \psi_0, i = 1, 2, \dots, K-1$, то векторы T_0, T_1, \dots, T_{K-1} линейно независимы тогда и только тогда, когда все они различны и $K \leq n$. Это означает, что граница для K пункта а) теоремы достигается.

с) Пусть $m = 1, K \leq n$. Тогда векторы T_0, T_1, \dots, T_{K-1} линейно независимы, если они различны.

д) Пусть выполнены условия $\theta_i t = n\psi_i t, i = 0, \dots, K-1, K < n \times m$. Тогда векторы T_0, T_1, \dots, T_{K-1} линейно независимы.

Для приложений Теоремы 1 в качестве количественной характеристики линейной независимости векторов $\omega_0 T_0, \omega_1 T_1, \dots, \omega_{K-1} T_{K-1}$ введем отношение

$$\rho = \frac{\lambda_{K-1}}{\lambda_0} \quad (6)$$

наименьшего и наибольшего собственных чисел матрицы Грамма r этой системы векторов или, что то же самое, матрицы \bar{R} . Геометрически близость ρ к нулю означает, что эллипсоид рассеяния матрицы r практически лежит в гиперплоскости, перпендикулярной собственному вектору этой матрицы, соответствующему минимальному собственному числу. Для зависимой системы векторов $\rho = 0$.

Предположим, что векторы T_0, \dots, T_{K-1} линейно независимы. Тогда ранг матрицы \bar{R} равен K (см. [6, 7]). Обозначим U_0, \dots, U_{K-1} ортонормированные собственные векторы матрицы \bar{R} , соответствующие собственным числам $\lambda_0 \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{K-1}$. Легко видеть, что эти векторы также являются собственными векторами матрицы R , соответствующими собственным числам $\mu_i = \lambda_i + \sigma^2$. Остальные собственные числа матрицы R равны σ^2 . Обычно σ^2 значительно меньше, чем λ_{K-1} , что соответствует обычному в задачах обнаружения предположению о большом значении отношения сигнала к шуму. Векторы U_0, \dots, U_{K-1} можно достроить векторами U_K, \dots, U_{N-1} до ортонормированного собственного базиса всего $n \times m$ -мерного пространства. Тогда векторы U_K, \dots, U_{N-1} – собственные векторы, соответствующие собственному числу σ^2 .

При относительно небольшом числе помех векторы T_0, T_1, \dots, T_{K-1} и вектор поиска (см. теорему 1) совместно линейно независимы, тогда вектор поиска S может входить в сигнальное пространство, только если он совпадает с одним из векторов T_0, T_1, \dots, T_{K-1} . С другой стороны на векторах поиска из сигнального пространства значения функции рельефа должны быть большими, чем для остальных сигнальных векторов. Действительно, разложим вектор поиска S по собственным векторам: $S = \sum_{i=0}^{N-1} \alpha_i U_i$, $\alpha_i = U_i^H S$. Из рассуждений, приведенных в [4], следует

$$\Phi = \frac{1}{\sum_{i=0}^{K-1} \frac{\alpha_i^2}{\lambda_i + \sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=K}^N \alpha_i^2} = \frac{\sigma^2}{\sum_{i=0}^{K-1} \frac{\alpha_i^2}{1 + \lambda_i / \sigma^2} + \sum_{i=K}^{N-1} \alpha_i^2}.$$

Поскольку λ_i намного больше, чем σ^2 , квадрат проекции вектора поиска $\sum_{i=1}^{K-1} \alpha_i^2$ на сигнальное пространство сильно уменьшается множителями $\frac{1}{1 + \lambda_i / \sigma^2}$. Таким образом, второе слагаемое знаменателя обычно значительно больше первого, что приводит к малым значениям функции рельефа. Исключение составляют только векторы поиска, очень близкие к одному из векторов T_0, T_1, \dots, T_{K-1} , для которых проекция на шумовое пространство либо отсутствует, либо очень мала. На таких векторах поиска функция рельефа имеет наибольшие локальные максимумы. Этим можно объяснить эффективность метода Кейпона.

Матрица R имеет наиболее простой для анализа вид в случае, когда векторы T_0, \dots, T_{K-1} ортогональны. Приведем условия ортогональности векторов T_0, \dots, T_{K-1} .

Теорема 2. Векторы ортогональны тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух условий:

1. $(\psi_i - \psi_j)st = 2\pi k$ для некоторого целого k и $(\psi_i - \psi_j)s \neq 2\pi k_1$ ни для какого целого k_1 .
2. $(\theta_i - \theta_j)tn = 2\pi k$ для некоторого целого k и $(\theta_i - \theta_j)t \neq 2\pi k_1$ ни для какого целого k_1 .

В случае ортогональности матрицы Грамма r система векторов $\omega_0 T_0, \omega_1 T_1, \dots, \omega_{K-1} T_{K-1}$ является диагональной с диагональными элементами $nt\omega_0^2, nt\omega_1^2, \dots, nt\omega_{K-1}^2$. Положительные собственные числа матрицы \bar{R} равны собственным числам матрицы r (см. [6, 7]) и равны $\omega_0^2 mn, \omega_1^2 mn, \dots, \omega_{K-1}^2 mn$ соответственно. Соответствующими нормированными собственными векторами матрицы \bar{R} являются векторы $U_i = T_i / \sqrt{mn}$, $i = 0, \dots, K-1$. Эти же векторы являются собственными векторами матриц R и R^{-1} с собственными числами

$$\omega_0^2 mn + \sigma^2, \omega_1^2 mn + \sigma^2, \dots, \omega_{K-1}^2 mn + \sigma^2 \text{ и } \frac{1}{\omega_0^2 mn + \sigma^2}, \frac{1}{\omega_1^2 mn + \sigma^2}, \dots, \frac{1}{\omega_{K-1}^2 mn + \sigma^2} \text{ соот-}$$

ответственно. Расширим временно определение функции рельефа, предполагая, что она является не функцией обобщенных координат (ψ, θ) , а функцией вектора S , $S^H S = mn$. Тогда стационарные точки функции рельефа будут равными векторам T_0, T_1, \dots, T_{K-1} и будут соответствовать всем локальным максимумам функции рельефа. Если снова сузить определение этой функции до функции от обобщенных координат (ψ, θ) , то эти точки останутся локальными максимумами функции рельефа со значениями в них этой функции, равными соответственно

$$\omega_0^2 + \frac{\sigma^2}{mn}, \quad \omega_1^2 + \frac{\sigma^2}{mn}, \quad \dots, \quad \omega_{K-1}^2 + \frac{\sigma^2}{mn}. \quad (7)$$

Отметим, что у функции рельефа могут быть и другие локальные максимумы, однако результаты моделирования показывают, что они менее резко выделены, чем максимумы в точках T_0, T_1, \dots, T_{K-1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВА РЕЗУЛЬТАТОВ

Доказательство теоремы 1

Рассмотрим сначала случай $K = 2$. Если векторы совпадают, то они, очевидно, линейно зависимы. Пусть они различны и для некоторых $\alpha_0, \alpha_1 \neq 0$

$$\alpha_0 T'_0 + \alpha_1 T'_1 = \alpha_0 \exp\{j(\psi_0 sp + \theta_0 tq)\} + \alpha_1 \exp\{j(\psi_1 sp + \theta_1 tq)\} = 0. \quad (8)$$

Для доказательства независимости векторов T'_0, T'_1 следует показать, что (8) ведет к противоречию.

После деления (8) на выражение $\alpha_1 \exp\{j(\psi_1 sp + \theta_1 tq)\}$ получим, что для некоторого φ при всех $p, q \leq 1$ выполняется равенство $\exp\{j[(\psi_0 - \psi_1)sp + (\theta_0 - \theta_1)tq + \varphi + \pi]\} = 1$. Полагая $p = q = 0$, для некоторого целого k_1 получим $\varphi + \pi = 2\pi k_1$, поэтому для некоторого целого k выполняется равенство $(\psi_0 - \psi_1)sp + (\theta_0 - \theta_1)tq = 2\pi k$. Полагая $p = 0, q = 1$ и наоборот, получим соотношения $(\psi_0 - \psi_1)s = 2\pi k$, $(\theta_0 - \theta_1)t = 2\pi k_1$, то есть векторы T'_0, T'_1 совпадают.

В общем случае пункт а) Теоремы доказывается методом математической индукции по K .

Пусть утверждение этого пункта верно при K помехах. Докажем его, исходя из этого предположения, для $K + 1$ помехи.

Пусть $K > 2$, все векторы T'_0, T'_1, \dots, T'_K различны и

$$\sum_{i=0}^K \alpha_i T'_i = \sum_{i=0}^K \alpha_i \exp\{j(\psi_i sp + \theta_i tq)\} = 0, \quad p, q \leq K, \quad (9)$$

где не все коэффициенты α_i равны нулю. Не умаляя общности, можно считать, что $\alpha_K \neq 0$. Поделив каждую строчку системы уравнений (9) на последний элемент, получим для

$$\beta_i = \frac{\alpha_i}{\alpha_K}, \quad i = 0, \dots, K-1$$

$$\sum_{i=0}^{K-1} \beta_i T'_i = \sum_{i=0}^{K-1} \beta_i \exp\{j((\psi_i - \psi_K)sp + (\theta_i - \theta_K)tq)\} = -1, \quad p, q \leq K. \quad (10)$$

Из (10) следует, что

$$\sum_{i=0}^{K-1} \beta_i T'_i = \sum_{i=0}^{K-1} \exp\{j(\psi_i - \psi_K)s\} \beta_i \exp\{j((\psi_i - \psi_K)sp + (\theta_i - \theta_K)tq)\} = -1, \quad p, q \leq K-1. \quad (11)$$

Вычитая из (11) выражение (10), получим

$$\sum_{i=0}^{K-1} \{\exp\{j(\psi_i - \psi_K)s\} - 1\} \beta_i \exp\{j((\psi_i - \psi_K)sp + (\theta_i - \theta_K)tq)\} = 0, \quad p, q \leq K-1.$$

Принимая $(\psi_i - \psi_K), (\theta_i - \theta_K), i \leq K-1$ за новые гипотетические обобщенные координаты помех, получим из индукционного предположения, что $\{\exp\{j((\psi_i - \psi_K)s) - 1\} \beta_i = 0$ или $\{\exp\{j((\psi_i - \psi_K)s) - 1\} \alpha_i = 0, i = 0, \dots, K-1$. Таким образом, коэффициент $\alpha_i \neq 0$ только, если $\exp\{j(\psi_i - \psi_K)s\} = 1$. Аналогично доказывается, что $\alpha_i \neq 0$ только, если $\exp\{j(\theta_i - \theta_K)s\} = 1$. Поскольку все векторы T_0', T_1', \dots, T_K' различны, то последние условия одновременно не выполняются. Поэтому $\alpha_i = 0, i = 0, \dots, K-1$. Из (8) следует, что в этом случае также $\alpha_K = 0$.

Для доказательства пункта б), проведя рассуждения пункта а) для переменной ψ получим, что для некоторого k выполняется противоречащее условию пункта б) соотношение $\psi_i - \psi_k = 2\pi k$. Если $\psi_i = \psi_0, i = 1, 2, \dots, K-1$ то линейная независимость векторов определяется только значениями одной обобщенной координаты θ , так что линейная независимость вытекает из пункта с).

Для доказательства пункта с) достаточно провести рассуждения пункта а) только для одной переменной.

Для доказательства пункта д) заметим, что в условиях этого пункта $\psi_i sp + \theta_i tq = \psi_i s(p + nq), p = 0, \dots, n-1, q = 0, \dots, m-1$. Числа $p + nq$ заполняют собой все целые числа от 0 до $mn-1$. Поэтому задача сводится к одномерному случаю, то есть к случаю, рассмотренному в пункте с).

Доказательство Теоремы 2. Ортогональность векторов T_i, T_l означает, что

$$(T_i, T_l) = \frac{(\exp\{j[(\psi_i - \psi_l)ms]\} - 1) (\exp\{j[(\theta_i - \theta_l)tn]\} - 1)}{(\exp\{j[(\psi_i - \psi_l)s]\} - 1) (\exp\{j[(\theta_i - \theta_l)]t\} - 1)} = 0. \quad (12)$$

Из (12) непосредственно следует Теорема 2.

РЕЗУЛЬТАТЫ СТАТИСТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ.

Приведем результаты моделирования функции рельефа для двух и трех помех. Предполагается, что мощность шума $\sigma^2 = 1$, мощности помех $\sigma_i^2 = 1000$, направление антенн соответствует обобщенным координатам (24, 30), область поиска соответствует прямоугольнику 21–28 по первой обобщенной координате (азимуту), 27–32 – по второй обобщенной координате (углу места). В таблицах помещены координаты активных помех, собственные числа ковариационной матрицы, выбранный нами показатель независимости векторов помех ρ и графическое изображение функции рельефа. Отметим, что ρ не является единственно возможным показателем линейной независимости координат помех, например, в качестве альтернативной характеристики можно брать определитель матрицы Грама координат помех.

На рис. 1 видны три острых пика, вершины которых соответствуют обобщенным координатам помех.

Из рисунка видно, что координаты определяются хорошо, что соответствует достаточной степени линейной независимости многомерных координат помех.

На рис. 2 изображен случай, когда степень линейной независимости многомерных координат помех недостаточна, поэтому функция рельефа выдает не отдельные пики, а «стену». В этом случае по функции рельефа определить координаты помех невозможно.

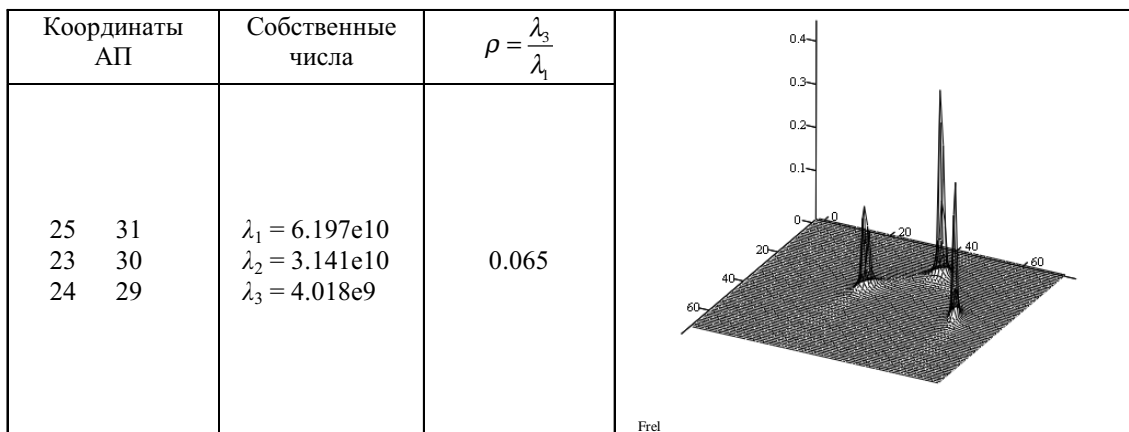


Рис. 1

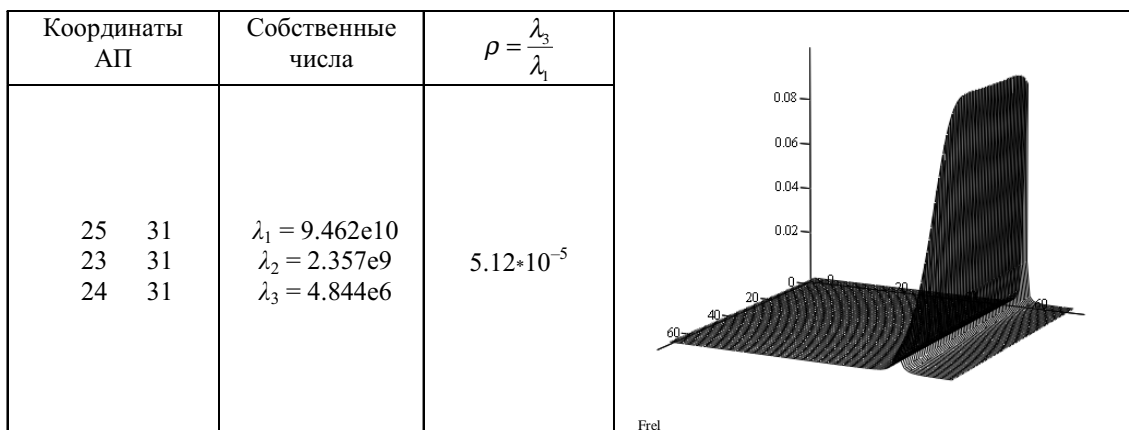


Рис. 2

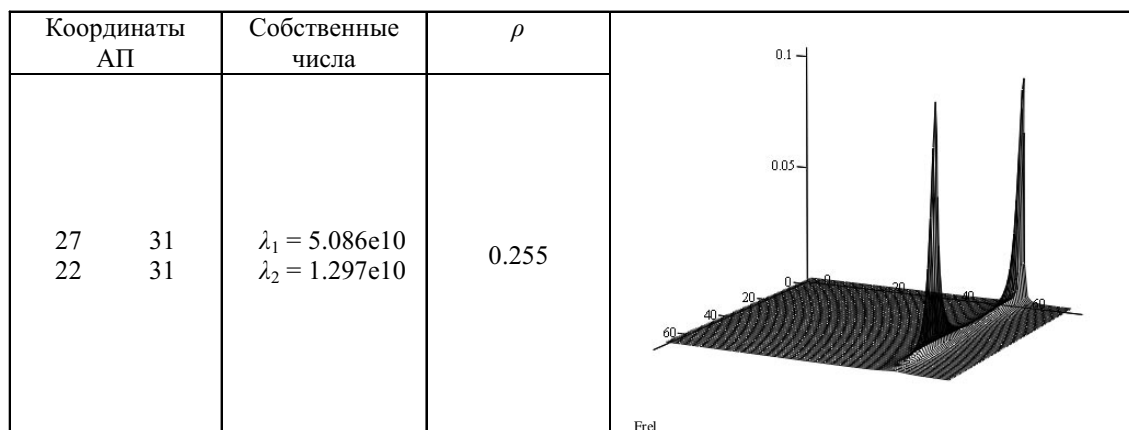


Рис. 3

На рис. 3 приведена функция рельефа для двух помех. Поскольку координаты помех можно считать линейно независимыми, то, как мы видим, они легко определяются по пикам функции рельефа.

На рис. 4 изображена функция рельефа для случая двух помех, когда степень линейной независимости многомерных координат помех недостаточна. Как и для трех помех в этом случае получается «стена», и обобщенные координаты помех установить невозможно.

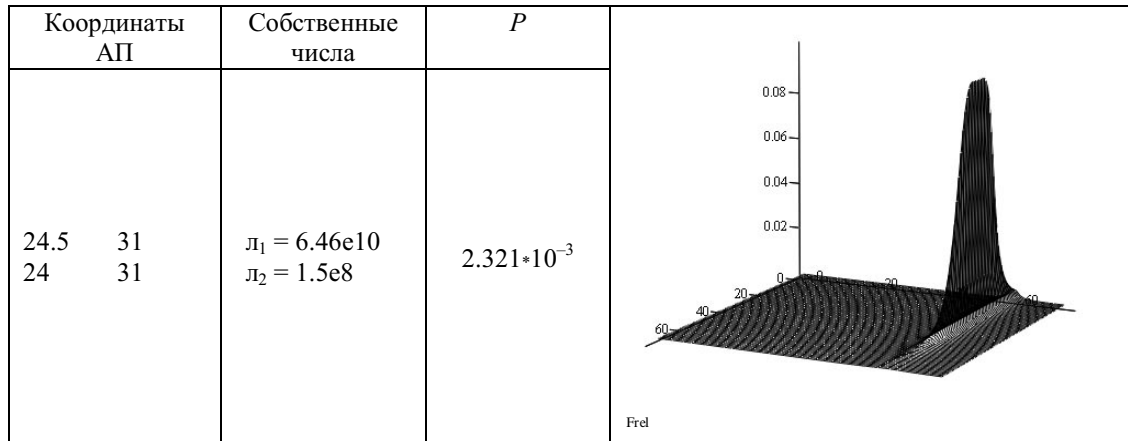


Рис. 4

Отметим, что для определения обобщенных координат помех важны координаты пиков функции рельефа и не важны значения функции рельефа в этих точках.

Литература

1. Турчин В.И. Введение в современную теорию оценки параметров сигналов. Н. Новгород: ИПФ РАН, 2005.
2. Кейтон Дж. Пространственно-временной спектральный анализ с высоким разрешением // ТИИЭР. 1969. Т. 57, № 8. С. 59–69.
3. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г., Анулин А.А. Оценивание параметров сигналов, принимаемых антенной решеткой // Изв. Вузов. Радиотехника. 1996. Т. 39, № 9. С. 1144–1160.
4. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г. Методы оценивания параметров сигналов и помех, принимаемых антенной решеткой // Учебно-методические материалы ННГУ, 2007.
5. Li J., Stoica P., Wang Z. On Robust Capon Beamforming and Diagonal Loading // IEEE Trans. On Signal Proc. 2003. Vol. 51, № 7. P. 1702–1715.
6. Воеводин В.В. Линейная алгебра. М.: Наука, 1980.
7. Ефимов Н.В. Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1970.

Abstract

Mathematical investigation and the investigation by means of computer simulation for Capon algorithm is done. In particular, some conditions for linear independence and for the orthogonality of signal vectors and the vectors of obstacles coordinates.

Keywords: radio-location, Capon algorithm, covariation matrix, relief function, independent coordinates, orthogonal vectors, eigenvalues, eigenvectors, grating, statistical simulation.

Егоров Владимир Алексеевич,
доктор физико-математических
наук, профессор, кафедра высшей
математики СПбГЭТУ «ЛЭТИ»,
44eva@rambler.ru,

Кондыбаев Нурлан Сакенович,
начальник отдела, СПб филиал
«Концерн ОАО «Радиотехнические
и Информационные Системы»
(ОАО «Концерн «РТИ Системы»),
nurkon@yandex.ru.



Наши авторы, 2011.
Our authors, 2011.