



РАСШИРЕННЫЙ И УТОЧНЕННЫЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ МАЯТНИКА КАПИЦЫ

Аннотация

В предыдущих статьях автора о маятнике с осциллирующим подвесом дано наглядное физическое объяснение явления динамической стабилизации перевернутого маятника [1] и установлена генетическая связь параметрических субгармонических резонансов с условиями динамической стабилизации [2]. В данной статье на основе указанной связи получены уточненные значения нижней и верхней границ динамической стабилизации, справедливые в более широкой области параметров системы. В частности, полученные границы устойчивости справедливы при сравнительно низких частотах осцилляций подвеса маятника, когда метод разделения быстрых и медленных движений не работает, и традиционный критерий устойчивости перевернутого маятника неприменим. Приводятся результаты компьютерного моделирования, подтверждающие расширенный критерий устойчивости.

Ключевые слова: параметрический резонанс, перевернутый маятник, динамическая стабилизация, субгармонические резонансы, фазовая синхронизация, компьютерное моделирование.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПРИБЛИЖЕННЫЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА

Широко известная интересная особенность поведения жесткого маятника с осциллирующим подвесом заключается в *динамической стабилизации перевернутого положения*. При достаточно больших значениях амплитуды осцилляций подвеса приведенный в перевернутое положение маятник не обнаруживает тенденции к опрокидыванию. Если маятник немного отклонить от вертикали, он будет совершать небольшие колебания около перевернутого положения на фоне быстрых осцилляций подвеса. Физическое объяснение этого удивительного яв-

ления динамической стабилизации перевернутого маятника было предложено академиком П.Л. Капицей в 1951 году, выполнившим также и детальное экспериментальное исследование этого явления (см. [3, 4]). По словам Капицы, это явление «так же поучительно, как и динамическая устойчивость волчка, и ему следует занять почетное место в лектории на демонстрациях по механике» [4].

Стабилизацию перевернутого маятника обычно объясняют с помощью метода усреднения, основанного на эвристическом подходе, в котором при движении маятника мгновенный угол отклонения $\varphi(t)$ представляют как суперпозицию сравнительно медленных колебаний, описываемых плавной функцией $\psi(t)$, и быстрых колебаний небольшой амплитуды $\delta(t) \ll 1$: $\varphi(t) = \psi(t) + \delta(t)$.

Когда подвес принудительно движется с некоторым ускорением, поведение маятника удобно описывать с помощью неинерциальной системы отсчета, связанной с подвесом. Из-за ускоренного движения такой системы отсчета на маятник, наряду с силой тяжести, действует еще и сила инерции, направленная противоположно ускорению системы отсчета. Если координата подвеса изменяется со временем по гармоническому закону с некоторой частотой ω и амплитудой a , то есть $z(t) = a \cos \omega t$, то сила инерции $F_{\text{ин}}(t)$ зависит от времени по такому же закону:

$$F_{\text{ин}}(t) = -m\ddot{z}(t) = m\omega^2 z(t). \quad (1)$$

Поэтому на протяжении одной половины периода колебаний подвеса, пока ось находится ниже среднего положения ($z(t) < 0$), сила инерции направлена вниз, и ее действие равносильно некоторому увеличению силы тяжести. На протяжении другой половины периода, когда подвес находится выше среднего положения (когда $z(t) > 0$), сила инерции направлена вверх, что равносильно уменьшению силы тяжести.

Дифференциальное уравнение для угла отклонения маятника $\varphi(t)$ с осциллирующим подвесом имеет вид:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} - \frac{a}{l}\omega^2 \cos \omega t\right) \sin \varphi = 0. \quad (2)$$

Второй член учитывает влияние момента силы трения, который в принятой модели пропорционален угловой скорости $\dot{\varphi}(t)$. Постоянная затухания γ обратно пропорциональна добротности Q , которую обычно используют для характеристики затухания малых собственных колебаний под действием вязкого трения: $Q = \omega_0 / 2\gamma$, где $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ – частота собственных колебаний предельно малой амплитуды в отсутствие осцилляций подвеса.

Для физического объяснения эффекта динамической стабилизации перевернутого маятника при быстрых осцилляциях подвеса нужно принять во внимание действие на маятник силы инерции, усредненное по периоду этих быстрых осцилляций. Согласно формуле (1) сила инерции изменяется со временем по синусоидальному закону, её среднее за период значение равно нулю. В

системе отсчета, связанной с осью, груз маятника смещается вверх-вниз вдоль по дуге окружности (рис. 1 б) и оказывается в положениях 1 и 2 в те моменты, когда осциллирующий подвес достигает соответствующих крайних точек 1 и 2 на рис. 1 а. В эти моменты сила инерции имеет одинаковую величину ($F_1 = F_2$), но в положении 1 плечо силы F_1 больше, чем плечо силы F_2 в положении 2. Поэтому среднее значение момента этой силы относительно оси вращения маятника отлично от нуля. Это наглядно видно из рис. 1. Именно средний момент силы инерции отвечает за необычное, противоречащее нашей интуиции поведение маятника.

Приведенное здесь качественное объяснение динамической стабилизации перевернутого маятника легко подкрепляется приближенными количественными соображениями. Когда маятник отклонен от вертикали в среднем на угол ψ (рис. 1), а осциллирующая ось смещена из своего среднего положения на $z(t) = a \cos \omega t$, мгновенная ориентация стержня маятника $\varphi(t) = \psi + \delta(t)$ приблизительно равна

$$\psi - z(t) \cos \psi / l = \psi - (a/l) \cos \psi \cos \omega t.$$

Мгновенное значение момента силы инерции $F_{\text{ин}}(t)$ равно произведению этой силы (1) на ее плечо $l \sin \varphi(t)$. В этом приближении первый член среднего момента силы инерции $\langle F_{\text{ин}}(t) l \sin \psi \rangle$ обращается в нуль, из-за того что среднее значение силы инерции

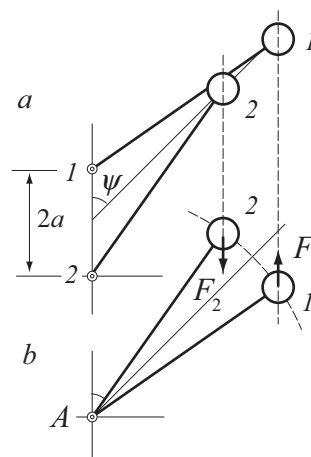


Рис. 1. Поведение маятника с осциллирующей осью в инерциальной (лабораторной) системе отсчета (а) и в системе, связанной с осью (б)

$\langle F_{in}(t) \rangle$ равно нулю, но второй член отличен от нуля:

$$\begin{aligned} & \langle F_{in}(t) l \cos \psi \delta(t) \rangle = \\ & = -ma^2 \omega^2 \sin \psi \cos \psi \langle \cos^2 \omega t \rangle = \\ & = -\frac{1}{2} ma^2 \omega^2 \sin \psi \cos \psi. \end{aligned} \quad (3)$$

При $\psi > \pi/2$ этот средний момент силы инерции стремится привести маятник в перевернутое положение. Величина среднего момента силы инерции может превысить момент силы тяжести $-mgl \sin \psi$ (который стремится опрокинуть маятник) при выполнении следующего условия:

$$\begin{aligned} & a^2 \omega^2 > 2gl, \text{ или } \frac{a}{l} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} > \sqrt{2}, \\ & \text{или } \frac{a}{l} > \sqrt{-2k}. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ – частота собственных малых колебаний маятника. Формула (4) выражает известный (приближенный) критерий устойчивости перевернутого маятника. Имея в виду дальнейшее уточнение и обобщение, мы выразили в (4) этот критерий через параметр k , который определяется следующим выражением:

$$k = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{g}{l\omega^2}. \quad (5)$$

Безразмерный параметр k (квадрат обратной нормированной частоты возбуждения), будучи физически менее прозрачным по сравнению с ω/ω_0 , тем не менее оказывается в дальнейшем более удобным, потому что уточненный критерий стабилизации в терминах параметра k имеет более простую форму. Отрицательные значения k соответствуют перевернутому маятнику, ибо изменение знака g формально можно рассматривать как переход к «силе тяжести», направленной вверх.

2. СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ РЕЗОНАНСЫ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

Альтернативный вывод критерия устойчивости перевернутого маятника был пред-

ложен в статье [2], посвященной субгармоническим параметрическим резонансам. В условиях субгармонического резонанса порядка n маятник совершает ровно один полный цикл колебания на протяжении целого числа n периодов осцилляций подвеса. Синхронизация движения маятника с колебаниями подвеса («фазовый захват») обеспечивает «подпитку» маятника энергией, необходимой для предотвращения затухания из-за трения. Субгармонические резонансы возможны и для перевернутого маятника. Легко понять, что нижней границе устойчивости перевернутого маятника соответствует субгармонический резонанс бесконечно высокого порядка n . Поэтому для нахождения критерия устойчивости можно рассчитать условия возникновения резонанса n -го порядка и перейти в них к пределу $n \rightarrow \infty$.

Пример субгармонических колебаний порядка $n = 8$ показан на рис. 2, в верхней части которого приведен график временной зависимости угловой скорости $\dot{\phi}(t)$ вместе с графиками гармоник угловой скорости. Графики получены при компьютерном моделировании движения маятника с помощью программы, которую можно найти на прилагаемом к журналу диске. Моделирование выполняется путем численного интегрирования дифференциального уравнения маятника (2).

В нижней части рис. 2 приведен спектр этой периодической функции с периодом $8T$. В спектре доминирует фундаментальная гармоника, период которой равен восьми периодам осцилляций подвеса. Её можно рассматривать как субгармонику осцилляций подвеса. Эта основная гармоника с частотой ω/n описывает плавную компоненту $\psi(t)$ сложного колебания маятника с периодом $8T$: $\psi(t) = A_1 \sin(\omega t/n)$. Значительный вклад в это периодическое колебание дают также две высшие гармоники с частотами $(1 - 1/n)\omega$ и $(1 + 1/n)\omega$. Из рис. 2 видно, что в спектре присутствуют еще две гармоники с частотами $(2 - 1/n)\omega$ и $(2 + 1/n)\omega$.

Для получения теоретического значения порога субгармонического резонанса n -го порядка можно искать решение $\phi(t)$ уравнения (2), в соответствии с рис. 2, в виде су-

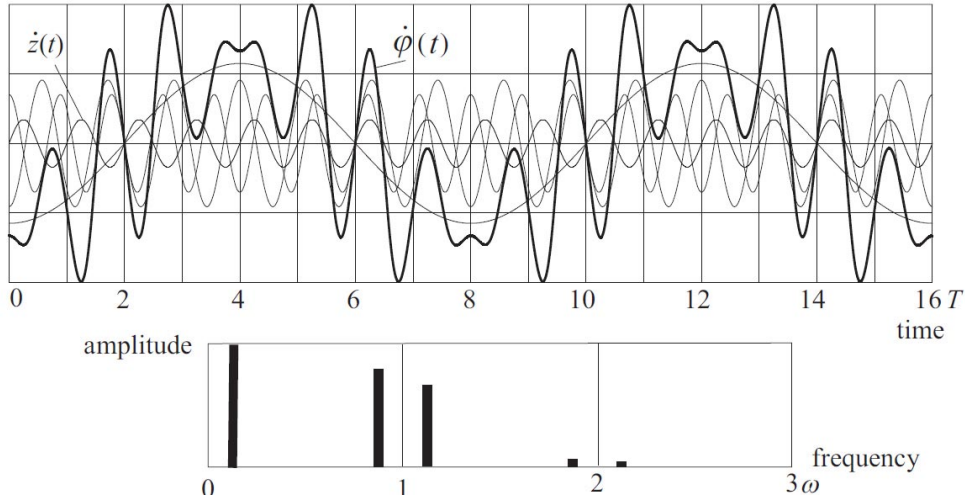


Рис. 2. График угловой скорости $\dot{\varphi}(t)$ вместе с графиками ее гармоник и спектр угловой скорости субгармонических колебаний при резонансе 8-го порядка

перпозиции основной гармоники с частотой ω/n и некоторой амплитудой A_1 , двух высших гармоник с частотами $(1 - 1/n)\omega$ и $(1 + 1/n)\omega$ (обозначим их амплитуды через A_{n-1} и A_{n+1} соответственно) и еще небольшой примеси гармоник с частотами $(2 - 1/n)\omega$ и $(2 + 1/n)\omega$ (амплитуды A_{2n-1} и A_{2n+1} соответственно):

$$\begin{aligned} \varphi(t) = & A_1 \sin(\omega t/n) + \\ & + A_{n-1} \sin[(n-1)\omega t/n] + \\ & + A_{n+1} \sin[(n+1)\omega t/n] + \\ & + A_{2n-1} \sin[(2n-1)\omega t/n] + \\ & + A_{2n+1} \sin[(2n+1)\omega t/n]. \end{aligned} \quad (6)$$

В условиях порога возбуждения субгармонических резонансов амплитуду колебаний маятника можно считать бесконечно малой, что позволяет в точном уравнении (2) положить $\sin \varphi \approx \varphi$. В результате (2) сводится к уравнению Матье:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega^2(k - m \cos \omega t)\varphi = 0, \\ (m = a/l). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь мы использовали параметр $k = g/(l\omega^2)$, введенный уравнением (5). Подставляя $\varphi(t)$ из (6) в уравнение (7) с $\gamma = 0$ и выполняя разложение произведения тригонометрических функций, получаем следующую систему приближенных уравнений для амплитуд A_1, A_{n-1}, A_{n+1} и A_{2n-1}, A_{2n+1} гармоник пробной функции $\varphi(t)$:

$$\begin{aligned} 2(kn^2 - 1)A_1 + mn^2 A_{n-1} - mn^2 A_{n+1} &= 0, \\ mn^2 A_1 + 2[n^2(k-1) + 2n-1]A_{n-1} - mn^2 A_{2n-1} &= 0, \\ -mn^2 A_1 + 2[n^2(k-1) - 2n-1]A_{n+1} + mn^2 A_{2n+1} &= 0, \\ mn^2 A_{n-1} + 2[n^2(k-4) + 4n-1]A_{2n-1} &= 0, \\ mn^2 A_{n+1} + 2[n^2(k-4) - 4n-1]A_{2n+1} &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Однородная система уравнений (8) имеет нетривиальное решение, если её определитель равен нулю. Это условие дает уравнение для минимального (порогового) значения амплитуды осцилляций подвеса m_{\min} , при которой может существовать n -периодическое движение, описываемое функцией $\varphi(t)$ из (6).

Если пренебречь малым вкладом гармоник с частотами $(2 - 1/n)\omega$ и $(2 + 1/n)\omega$ (см. спектр на рис. 2), то есть положить амплитуды A_{2n-1} и A_{2n+1} равными нулю, система уравнений (8) значительно упрощается. Решение такой упрощенной системы было приведено в [2]. Полное решение системы (8) можно найти с помощью какого-либо математического пакета, например *Mathematica* (Wolfram Research, Inc.). Из требования обращения в нуль определителя однородной системы уравнений (8) находим критическую (пороговую) амплитуду возбуждения m_{\min} субгармонического резонанса порядка n . Затем, после подстановки в (8) найденной таким об-

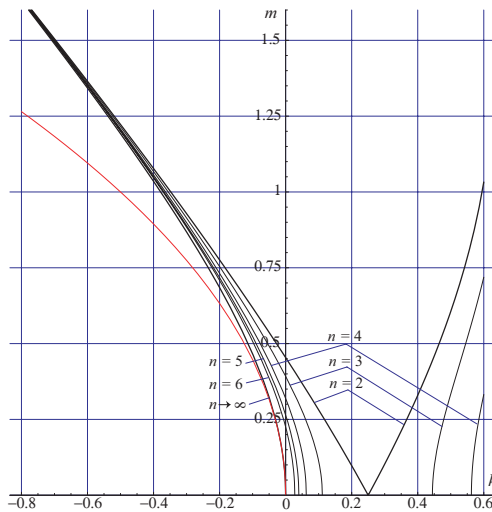


Рис. 3. Относительная амплитуда подвеса $m = a/l$ как функция $k = g/(l\omega^2)$ (квадрата обратной относительной частоты подвеса) в условиях порога субгармонических резонансов нескольких порядков n . Границе области динамической стабилизации перевернутого маятника соответствует левая кривая, обозначенная как $n \rightarrow \infty$ (см. подробности в тексте)

разом величины m_{\min} , можно найти относительные амплитуды высших гармоник

$A_{n-1}/A_1, A_{n+1}/A_1, A_{2n-1}/A_1$ и A_{2n+1}/A_1 . Окончательные аналитические выражения для m_{\min} и для амплитуд гармоник получаются слишком громоздкими и потому здесь не приводятся. Эти выражения были использованы для построения на рис. 3 кривых зависимости m_{\min} от параметра $k = (\omega_0/\omega)^2$, соответствующих субгармоническим резонансам нескольких порядков n .

Чтобы проверить в компьютерном моделировании полученные выше теоретические результаты для субгармонических параметрических резонансов перевернутого маятника, выберем для параметра k значение -0.3 , соответствующее частоте возбуждения $\omega = 1.826 \omega_0$, при которой разделение движения маятника на быструю и медленную компоненту со всей очевидностью неприменимо. Для возбуждения субгармонического резонанса порядка $n = 8$ описанный выше расчет предсказывает пороговую амплитуду осцилляций подвеса $m_{\min} = a_{\min}/l$, составляющую 87.73 % длины маятника. Результаты моделирования, представленные на рис. 4, с высокой точностью подтверждают это теоретическое предсказание.

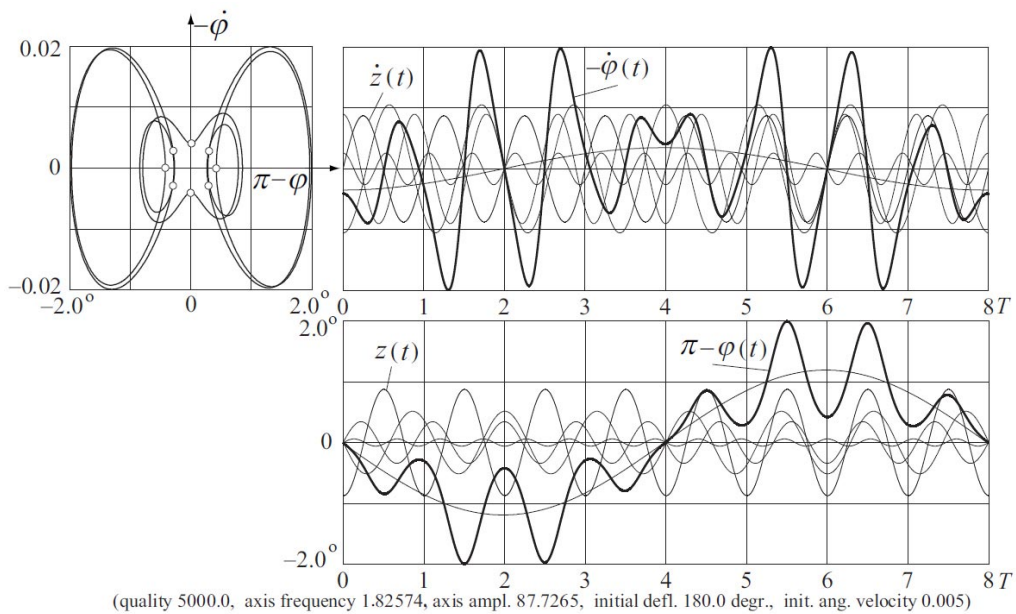


Рис. 4. Фазовая траектория с сечениями Пуанкаре, графики временной зависимости угловой скорости $\dot{\varphi}(t)$ и угла отклонения $\varphi(t)$ (вместе с графиками их гармонических составляющих) для субгармонического резонанса 8-го порядка

3. УТОЧНЕННЫЙ КРИТЕРИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА

Как уже отмечалось выше, критерий устойчивости перевернутого маятника можно связать с условием возбуждения субгармонических колебаний бесконечно большого порядка n в окрестности положения $\varphi = \pm\pi$. Поэтому предел m_{\min} при $n \rightarrow \infty$ дает улучшенную формулу для нижней границы динамической стабилизации перевернутого маятника:

$$m_{\min} = 2\sqrt{\frac{k(k-1)(k-4)}{3k-8}}. \quad (9)$$

Это выражение должно заменить собой широко известный приближенный критерий $m_{\min} = \sqrt{-2k}$ (4), справедливый при $\omega_0 \ll \omega$, когда оправдано разделение движения маятника на медленную и быструю компоненты. Минимальная амплитуда $m_{\min} = a_{\min}/l$, соответствующая уточненному критерию (9) динамической стабилизации, показана как функция $k = g/(l\omega^2)$ жирной левой кривой, помеченной как $n \rightarrow \infty$ на рис. 3. Эта кривая целиком лежит в области

отрицательных значений k . Для сравнения уточненного критерия (9) с общепринятым приближенным критерием (4) устойчивости перевернутого маятника последний также показан на рис. 3 тонкой кривой (красной в электронной версии статьи). Отметим, что эти кривые почти точно совпадают при малых отрицательных значениях k (то есть при высоких частотах возбуждения), и сильно расходятся при низких частотах и больших амплитудах осцилляций подвеса, где метод разделения движений неприменим.

При частоте возбуждения $\omega = 1.826\omega_0$ ($k = -0.3$) уточненный критерий (9) дает для нижней границы устойчивости амплитуду возбуждения $a_{\min} = 0.868l$. Верхняя граница (см. ниже) при $k = -0.3$ равна $a_{\max} = 0.929l$. Компьютерное моделирование (см. рис. 5) на основе численного интегрирования точного уравнения (2) показывает, что при $a = 0.875l$ (то есть немного выше нижней границы) и при $a = 0.925l$ (немного ниже верхней границы) маятник, первоначально отклоненный на 10° и отпущенный без начальной скорости, постепенно возвращается в перевернутое положение.

Если амплитуда осцилляций подвеса при

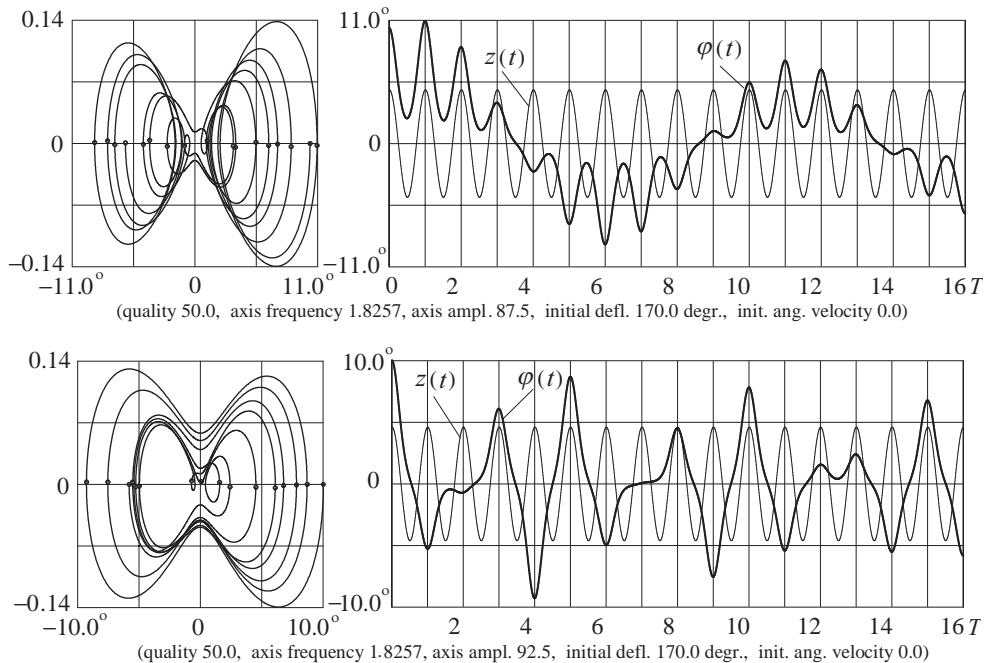


Рис. 5. Фазовые траектории и графики постепенно затухающих колебаний около перевернутого положения над нижней и под верхней границами динамической стабилизации

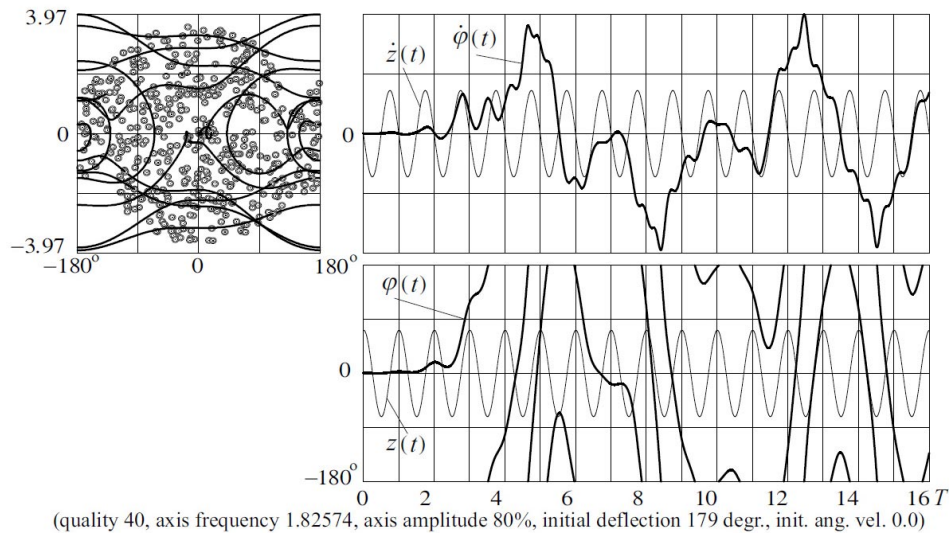


Рис. 6. Хаотическое поведение маятника («tumbling chaos») ниже границы динамической стабилизации

$k = -0.3$ меньше $0.868l$, перевернутый маятник неустойчив. Как видно из рис. 6, при $k = -0.3$ и $a = 0.80l$ маятник, отпущенный при отклонении всего лишь на 1° от перевернутого положения, в конце концов попадает в хаотический режим – колебания со случайно изменяющимся размахом и беспорядочные перевороты в одну и другую стороны. Такой режим «кувырканий» в англоязычной литературе обычно называют «tumbling chaos». Графики временной зависимости $\dot{\varphi}(t)$ и $\varphi(t)$ на рис. 6 показывают начальную стадию переходного процесса к динамическому хаосу. Множество сечений Пуанкаре на фазовой плоскости дает представление о последующем хаотическом поведении маятника. Отметим, что при таких параметрах возбуждения ($k = -0.3$ и $a = 0.80l$) перевернутый маятник, согласно приближенному критерию (4), должен быть устойчивым (при $k = -0.3$ выражение (4) дает $a_{\min} = 0.775l$).

4. ВЕРХНЯЯ ГРАНИЦА ДИНАМИЧЕСКОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА

Кривые на рис. 3, расположенные справа от границы устойчивости перевернутого маятника (от кривой $n \rightarrow \infty$), показывают минимальные значения амплитуды возбуж-

дения, при которых могут возникать субгармонические резонансы разных порядков (первая после $n \rightarrow \infty$ кривая – для $n = 6$, остальные – для значений n , уменьшающихся до $n = 2$ слева направо). В области отрицательных значений k эти кривые соответствуют субгармоническим резонансам перевернутого маятника. Случай $k = 0$ соответствует маятнику в невесомости ($g = 0$), или, что физически эквивалентно, предельно высокой частоте возбуждения. Точки пересечения кривых с осью ординат на диаграмме рис. 3 дают минимальные значения амплитуды возбуждения, при которых могут возникать субгармонические резонансы определенных порядков n около любого из двух динамически стабилизированных положений равновесия, расположенных в отсутствие силы тяжести в направлениях осцилляций оси маятника.

Продолжения кривых в область положительных значений k соответствуют субгармоническим резонансам маятника около нижнего положения равновесия. Кривая $n = 2$ соответствует обычному параметрическому резонансу, в котором два цикла возбуждения укладываются на протяжении одного полного цикла колебаний маятника. В отсутствие трения пороговая амплитуда возбуждения этого резонанса стремится к нулю при $\omega \rightarrow \omega_0/2$, то есть при $k \rightarrow 1/4$. В области

отрицательных значений k , соответствующих перевернутому маятнику, кривая $n = 2$ описывает дестабилизацию верхнего (динамически стабилизированного) положения равновесия путем возбуждения «флаттер»-моды колебаний с периодом $2T$. Другими словами, эта кривая дает верхнюю границу динамической стабилизации перевернутого маятника. Подробное обсуждение «флаттер»-моды колебаний и ее связи с обычным параметрическим резонансом неперевернутого маятника приведено в [2].

Компьютерное моделирование (рис. 7) показывает, что спектр «флаттер»-моды колебаний с периодом $2T$, происходящих при превышении верхней границы динамической устойчивости, состоит из основной гармоники с частотой $\omega/2$, небольшой примеси третьей гармоники с частотой $3\omega/2$ и совсем крошечной добавки в виде пятой гармоники с частотой $5\omega/2$:

$$\varphi(t) = A_1 \cos(\omega t/2) + A_3 \cos(3\omega t/2) + A_5 \cos(5\omega t/2). \quad (10)$$

Подставляя $\varphi(t)$ в линеаризованное дифференциальное уравнение (7) с $\gamma = 0$ и разлагая произведения тригонометрических

функций, получаем выражение, в котором нужно приравнять нулю коэффициенты при $\cos(\omega t/2)$, $\cos(3\omega t/2)$ и $\cos(5\omega t/2)$. В результате получаем систему однородных алгебраических уравнений для коэффициентов A_1 , A_3 и A_5 :

$$\begin{aligned} (4k - 2m - 1)A_1 - 2mA_3 &= 0, \\ -2A_1 + (4k - 9)A_3 - 2mA_5 &= 0, \\ -2mA_3 + (4k - 25)A_5 &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

которая имеет нетривиальное (ненулевое) решение при условии, что ее определитель равен нулю. Если пренебречь вкладом пятой гармоники в $\varphi(t)$ (10), то есть если положить $A_5 = 0$, получим следующее приближенное выражение для верхней границы динамической стабилизации:

$$m_{\max} = \frac{1}{4} \left[\sqrt{(4k - 9)(20k - 13)} + 4k - 9 \right]. \quad (12)$$

Если же учитывать 5-ю гармонику в функции $\varphi(t)$ (10), требование существования ненулевого решения системы (12) приводит к уравнению третьей степени для искомой амплитуды возбуждения $a_{\max}/l = m_{\max}$. Соответствующий верхней границе стабилизации корень этого уравнения (слишком гро-

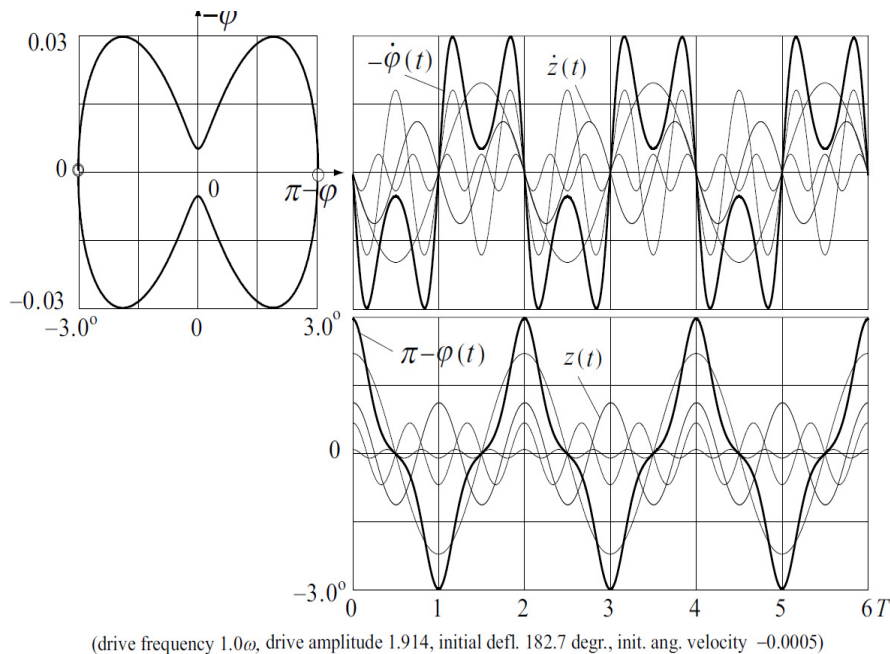


Рис. 7. «Флаттер»-мода колебаний перевернутого маятника непосредственно над верхней границей динамической стабилизации

моздкий, чтобы приводить его здесь) использован для построения кривой $n = 2$ на рис. 3. Впрочем, в пределах рассматриваемого интервала частот возбуждения (значений k в интервале $-0.8-0.6$) приближенное выражение (12) дает кривую, практически неотличимую от кривой $n = 2$ на рис. 3.

Нижняя и верхняя границы динамической стабилизации перевернутого маятника постепенно сближаются по мере уменьшения частоты осцилляций подвеса: диаграмма на рис. 3 показывает, что интервал между m_{\min} и m_{\max} сужается при смещении влево, то есть когда $|k|$ возрастает. Обе границы сливаются при $k \approx -1.41$ ($\omega \approx 0.8423 \omega_0$) и $m \approx 2.451$. Уменьшающийся «островок» устойчивости перевернутого маятника погружается в окружающее «море» хаотических режимов.

Для экспериментальной проверки улучшенного критерия (9) и его сравнения с общеизвестным критерием (4) разумно выбрать значение $k = -0.5$ (частота возбуждения $\omega = 1.4142 \omega_0$). При таком k критерий (9) дает для относительной амплитуды возбуждения $m_{\min} = 1.1920$ (119.20 % длины маятника), в то время как приближенный критерий (4) дает $m_{\min} = 1.00$ ($a_{\min} = l$) – лишь 100 % длины маятника. Теоретическое значение верхней границы стабилизации при $k = -0.5$ равно $m_{\max} = 1.2226$ (122.26 %), а в соответствии с (12) $m_{\max} = 1.2265$ (122.65 %).

Моделирование показывает, что ниже $m = 115.68$ % маятник совершает хаотическое движение («tumbling chaos»), при $m = 115.69$ % – 119.19 % после продолжи-

тельного переходного процесса маятник оказывается захваченным в неравномерное вращение в одном направлении (по часовой либо против часовой стрелки, в зависимости от начальных условий) с периодом, равным периоду возбуждения (в противоречии с общеизвестным приближенным критерием (4), согласно которому перевернутый маятник должен быть устойчивым), и лишь в интервале $m = 119.20$ % – 122.27 % маятник, отпущенный при малом отклонении от перевернутого положения, в конце концов приходит в состояние покоя, в полном соответствии с уточненным критерием (9). Затем, при превышении верхней границы стабилизации (при $m = 122.28$ % – 123.02 %) маятник оказывается в «флаттер»-моде; при $m = 123.03$ % – 147.01 % совершает однонаправленное вращение; при $m = 147.02$ % – 150.6 % маятник, после продолжительного хаотического переходного процесса, приходит в режим больших колебаний с периодом $2T$ около перевернутого положения с амплитудой около 260° (подобных колебаниям, показанным на рис. 9); при $m \geq 150.7$ % маятник опять совершает однонаправленное вращение.

Дальнейшие примеры моделирования относятся к случаю $k = -1$ ($\omega = \omega_0$). Теоретические значения нижней и верхней границ динамической стабилизации равны $m_{\min} = 1.9069$ (190.69 % длины маятника) и $m_{\max} = 1.9138$ (191.38 %) соответственно. Фазовая траектория и график на рис. 8 показывают, как в этом узком интервале амплитуд возбуждения маятник, будучи отпу-

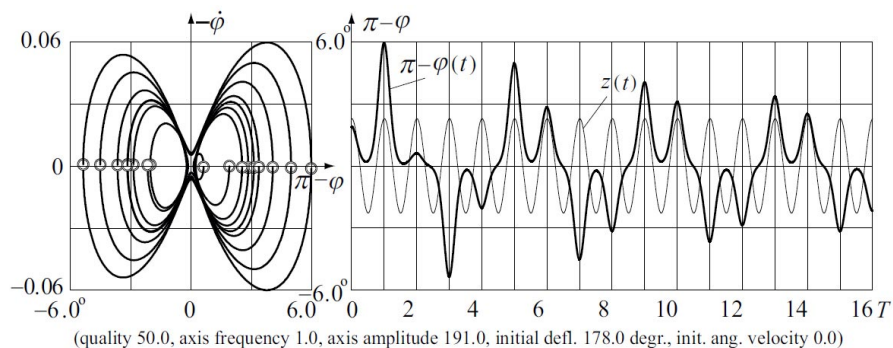


Рис. 8. Динамическая устойчивость маятника при низкой частоте и большой амплитуде осцилляций подвеса

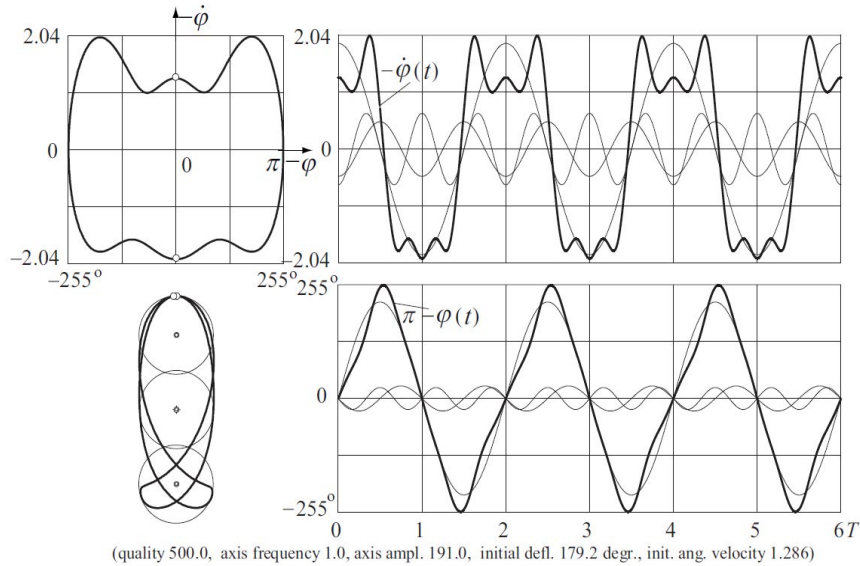


Рис. 9. Колебания большой амплитуды с периодом $2T$ около перевернутого положения: фазовая траектория (вверху слева), траектория груза маятника в пространстве (внизу слева), графики угловой скорости $\dot{\varphi}(t)$ (вверху справа) и угла отклонения $\varphi(t)$ (внизу справа) вместе с графиками гармонических составляющих

щенным при отклонении 178° , постепенно приближается к перевернутому положению, совершая нерегулярные затухающие колебания с максимальным отклонением около 6° . Бассейн притяжения аттрактора, соответствующего покою в перевернутом положении, весьма мал: при немного измененных начальных условиях маятник, после продолжительного хаотического переходного процесса, оказывается захваченным в стационарное колебание большого размаха (с амплитудой около 255° , период которого равен двум циклам возбуждения). Рис. 9 дает представление о таком необычном режиме колебаний. Поскольку за один цикл колебаний подвеса маятник на пути от среднего (перевернутого) положения до максимального отклонения проходит более половины оборота, этот периодический режим можно рассматривать и как чередующиеся перевороты по и против часовой стрелки.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Хорошо известный критерий динамической стабилизации перевернутого маятника выводится обычно путем разделения быстрого и медленного движений маятника. Такой подход и связанная с ним концепция

эффективного потенциала для медленного движения очень полезны для физического объяснения динамической стабилизации и для объяснения происхождения субгармонических резонансов высоких порядков. Однако разделение быстрых и медленных движений возможно лишь при достаточно высокой частоте и малой амплитуде осцилляций подвеса.

Улучшенный критерий для нижней границы динамической стабилизации, справедливый в более широкой области значений частоты и амплитуды возбуждения, включая те значения, для которых метод разделения быстрых и медленных движений неприменим, получен путем установления близкого родства явления динамической стабилизации перевернутого маятника и субгармонических параметрических резонансов.

Верхняя граница стабилизации связана с условиями возбуждения «флаттер»-моды колебаний перевернутого маятника, которую можно рассматривать как полный аналог параметрического резонанса неперевернутого маятника. Оба явления принадлежат одной и той же ветви стационарных колебаний с периодом $2T$. Поэтому критерий дестабилизации перевернутого положения равновесия может быть найден тем же методом, что и

условия возбуждения обычного параметрического резонанса. Результаты аналитических расчетов полностью подтверждаются компьютерным моделированием, выполня-

емым на основе численного интегрирования точного дифференциального уравнения маятника с осциллирующим подвесом.

Литература

1. Бутиков Е.И. Стабилизация перевернутого маятника (60 лет маятнику Капицы) // Компьютерные инструменты в образовании, 2010. № 5 С. 39–51.
2. Бутиков Е.И. Маятник с осциллирующим подвесом (субгармонические резонансы) // Компьютерные инструменты в образовании, 2011. № 1. С. 31–49.
3. Капица П.Л. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса // ЖЭТФ, 1951. № 21, С. 588–597.
4. Капица П.Л. Маятник с вибрирующим подвесом // УФН, 1951. № 44. С. 7–20.

Abstract

In preceding papers of the author about the pendulum with an oscillating pivot a clear physical explanation of the dynamic stabilization of an inverted pendulum was presented [1], and a close relationship between subharmonic parametric resonances and conditions of dynamic stabilization was established [2]. In the present paper, on the basis of this relationship, more exact values of the lower and upper boundaries of dynamic stabilization are obtained. These values are valid in a wider region of the system parameters than previous results. In particular, the established boundaries are applicable for relatively low frequencies, for which separation of rapid and slow motions is inadmissible, and the commonly known criterion of the inverted pendulum stability does not work. Computer simulation of the physical system aids the analytical investigation and proves the enhanced criterion of dynamic stability.

Keywords: parametric resonance, inverted pendulum, dynamic stabilization, subharmonic resonances, phase locking, computer simulation.



Наши авторы, 2011.
Our authors, 2011.

*Бутиков Евгений Иванович,
профессор физического факультета
СПбГУ,
eugene.butikov@gmail.com.*