И в шутку и всерьез

УДК 50(09)

Ходанович Александр Иванович

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ С ЧИСЛОМ π В ФИЗИКЕ И МАТЕМАТИКЕ

Аннотация

Рассматриваются вычислительные алгоритмы числа π в физике и математике. Приводятся результаты компьютерных экспериментов с числом π. В частных случаях доказано нормальное свойство фундаментальной константы.

Ключевые слова: число π, вычислительный алгоритм, фундаментальная константа, нормальное свойство числа.

Модельный характер всех наших знаний приводит к сближению физической и математической компонент развиваемых моделей. Характерной чертой научной деятельности является исключительная трудность, а порой и невозможность разделения физической и математической модели при рассмотрении достаточно сложных реальных явлений. «Мне кажется, что на самом деле современная математика и физика – это просто одна и та же наука. Вовсе не много-много разных наук, как часто думают, а с достаточно глубокой физико-математической точки зрения – просто одна и та же наука», – считает академик В.П. Маслов [4].

Похожая точка зрения выдающегося математика В.И. Арнольда: «Математика, подобно физике, – экспериментальная наука, отличающаяся от физики лишь тем, что в математике эксперименты очень дешевы... Математика является экспериментальной наукой – частью теоретической физики и членом семейства естественных наук. Основные принципы построения и преподавания всех этих наук применимы и к математике... Умение составлять адекватные математические модели реальных ситуаций должно составлять неотъемлемую часть математического образования... При всем огромном социальном значении вычислений (и computer science) сила математики не в них, и преподавание математики не должно сводиться к вычислительным рецептам» [6]. Ситуация очень напоминает ту, которая существовала во времена Ньютона, когда физик и математик очень часто воплощались в одном ученом, а вся проблематика теоретической физики составляла важнейшую, определяющую часть чисто математических исследований.

Рассмотрим мысленный, модельный эксперимент под названием «В бездонном колодце». О сквозном туннеле через земной шар мечтали в 18 веке математик Мопертюи и философ Вольтер [5]. Предположим, что Земля просверлена по диаметру (рис. 1). В образовавшийся колодец опустили небольшой предмет. Определить характер движения тела и скорость в центре Земли без учета сопротивления воздуха.

Характер движения можно получить из геометрических соображений. Вращение представляет собой суперпозицию перпендикулярных гармонических колебаний, поэтому решение совпадает с периодом кругового вращения спутника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}},$$

а скорость в центре Земли совпадает с первой космической скоростью. Аналогичный результат дает динамический метод решения «экспериментальной» задачи. Физическую формулу, содержащую число π можно рассматривать в качестве способа вычисления фундаментальной математической константы.

Законы колебательного движения обладают универсальностью, общностью для колебаний различной физической природы. Академик Л.И. Мандельштам отмечал: «Теория колебаний объединяет, обобщает различные области физики... Каждая из областей физики – оптика, механика, акустика – говорит на своем «национальном» языке. Но есть «интернациональный» язык, и это – язык теории колебаний... Изучая одну область, вы получите тем самым интуицию и знания совсем в другой области».

В XVII в. Х. Гюйгенс (1629–1695) установил формулу для малых колебаний математического маятника

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}}$$

и предложил использовать ее для определения эталона длины (маятник с периодом колебаний 2 с); в этом случае $\pi^2 \approx g$ (с учетом зависимости g от широты). Формула Гюйгенса для числа π, полученная методом многоугольников

$$\pi \approx \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n, \quad n \ge 3$$

обсуждалась в физико-математическом журнале «Квант» [2].

В 1923 г. ленинградский физик А.А. Фридман (1888–1925) получает циклоиду в космологии с периодом $\pi \cdot a$, где коэффициент $a = 13 \cdot 10^9$ лет был вычислен Э. Хабблом в 1929 г. Известный физик Р. Фейнман высказал важную космологическую гипотезу: 1 год = $\pi \cdot 10^7$ с. Формула экспериментально доказана в 1975 г.

Фундаментальной является постоянная тонкой структуры, введенная в 1916 г. А. Зоммерфельдом

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}.$$

В 1936 г. В. Гейзенберг предложил соотношение $\alpha = 2^{-4} \cdot 3^{-3} \cdot \pi$. В 1971 г. Уайлер опубликовал следующее выражение для α [1]:

$$\alpha = \frac{9}{8\pi^4} \cdot \left(\frac{\pi^5}{2^4 \cdot 5!}\right)^{1/4}.$$

В статье [1] обсуждаются фундаментальные константы в Стандартной модели физики элементарных частиц и их возможные изменения во времени.

Физики продолжают «лепить» фундаментальные физические постоянные из числа π. Так Х. Уотсон выражает отношение масс протона и электрона

$$4\pi \cdot \left(4\pi - \frac{1}{\pi}\right)\left(4\pi - \frac{2}{\pi}\right) \approx \frac{m_p}{m_e}.$$

Ю.И. Рогозин находит довольно точную комбинацию констант π, e, Φ для постоянной тонкой структуры [3]

$$\frac{1}{\alpha} \approx \frac{256 \cdot e}{\pi \cdot \Phi}.$$

История и современные алгоритмы вычисления числа π (ряды, интегралы, рекурсии) подробно обсуждаются в учебной ли-

Рис. 1. Мысленный эксперимент в физике

тературе [2], [3]. Актуализировать экспериментальную деятельность, развивая познавательный интерес, позволяют исторические факты.

Вспомним то, что отношение длины окружности к ее диаметру постоянно, было известно еще в глубокой древности. Первое обозначение этого числа греческой буквой π содержится в работе «Synopsis Palmoriorum Matheseos» («Обозрение достижений математики») английского преподавателя Уильяма Джонса (1675–1749), вышедшей в 1706 году. Обозначение π для отношения длины окружности к диаметру широко распространилось после того, как его стал использовать в своих трудах Леонард Эйлер (1707–1783).

С появлением компьютеров темпы погони за точными десятичными знаками числа π резко ускорились.

В июне 1949 года Джон фон Нейман (1903–1957) и его сотрудники вычислили 2037 знаков на одной из первых вычислительных машин ENIAC. Рубеж в 10000 знаков достигнут в 1958 году Ф. Женюи с помощью компьютера IBM 704. Сто тысяч знаков π вычислили в 1961 году Дэниэл Шенкс и Джон Ренч с помощью компьютера IBM 7090. В 1973 году Жан Гийу и М. Буйе преодолели отметку в 1000000 знаков, что заняло меньше одного дня работы компьютера CDC-7600.

По алгоритму Джонатана и Питера Борвейнов в январе 1986 года Дэвид Х. Бейли получил 29360000 десятичных знаков π на суперкомпьютере Cray-2, а в 1987 году Я. Канада и его сотрудники – 134217000 знаков на суперкомпьютере NEC SX-2. Результат Дэвида и Грегори Чудновски из Колумбийского университета в Нью-Йорке, вычисливших в 1989 году 1011196691 знак числа π, попал даже в книгу рекордов Гиннеса. Для своих расчетов они использовали суперкомпьютер Cray-2 и сеть компьютеров IBM-3090. К октябрю 1995 года сотрудниками Токийского университета Ясумасой Канадой и Дайсуке Такахаши было вычислено свыше 6 миллиардов цифр. Они же в 1999 году на компьютере HITACHI SR 8000 вычислили 206158430000 цифр числа π [3].

В конце прошлого столетия посетители одного из сайтов встречали объявление, приглашающее их принять участие в глобальном проекте «Pi-Hex». Любой житель Земли, подключив свой компьютер к сети Интернет, мог стать участником коллективных вычислений отдельных цифр двоичной записи числа π. Координатором этого глобального проекта выступил студент университета Симона Фрезера (США).

К настоящему времени доказано, что число π иррационально и трансцендентно. Свойство иррациональности числа π, то есть непредставимость его в виде отношения двух целых чисел, доказали Иоганн Ламберт (1728–1777) и Адриен Лежандр (1752–1833) в конце XVIII века. Свойство трансцендентности означает, что число π не является корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами. Это свойство было доказано немецким математиком Фердинандом Линдеманом (1852–1939) в 1882 году. В настоящее время ведутся исследования по уточнению «тонкой структуры» числа π [3].

Экспериментируя с алгоритмами на компьютере, можно познакомиться с нормальным свойством мантиссы числа, которое определил французский математик Эмиль Борель в 1909 году.

Положительное число, меньшее единицы, называется нормальным, если в его десятичной записи любая комбинация цифр встречается одинаково часто. Это определение можно распространить и на другие, недесятичные системы счисления.

Если для последовательности десятичных цифр дробной части числа π (рис. 2) выполняется равенство

π := 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923(
816406286208998628034825342117068

Рис. 2

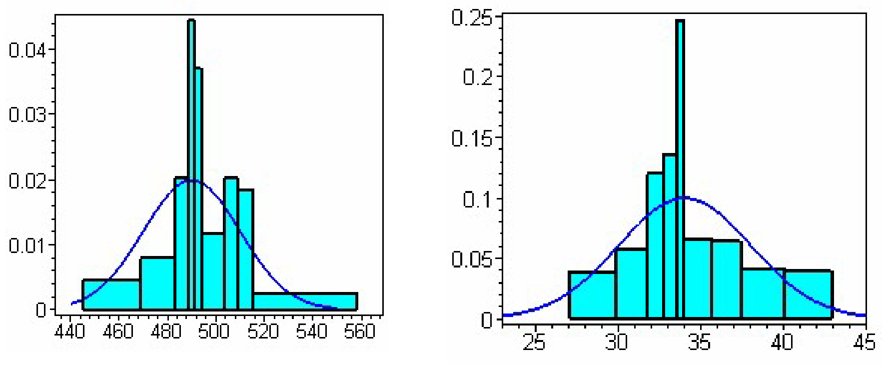

Рис. 3. Статистическая проверка математической гипотезы на компьютере

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N(\delta,n)}{n}=\frac{1}{g}$$

для любой цифры $\delta = (0, 1, ..., 9)$ и $g = 10$, то в этом случае дробная часть числа π, по терминологии Э. Бореля, представляла бы собой вещественное число, слабо нормальное к основанию 10. Естественно, что число π можно представить в системе счисления с другим основанием g, например, в двоичной ($g = 2$), восьмеричной ($g = 8$) или шестнадцатиричной ($g = 16$) системе.

Наконец, чтобы ввести понятие нормального числа, нужно рассмотреть не одиночные цифры, а произвольные кортежи из цифр (двухзначные, трехзначные и т. д.). Если частота появления кортежей для заданного числа символов сохраняется, то есть выполняется равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{k\cdot N(\delta,n)}{n}=\frac{1}{g^k},$$

то число π называется *нормальным.*

В настоящее время неизвестно, является ли дробная часть числа π слабо нормальной к основанию 10 или к какому-либо другому основанию в общем случае [3].

Тем не менее, результаты учебных компьютерных экспериментов в системе символьной математики Maple доказывают слабо нормальное свойство мантиссы числа π для частных случаев ($n = 10^5$, $g = 2, 8, 10, 16$) с точностью до 1% и нормальное свойство ($n = 10^5$, $g = 10$; $\kappa = 2$, $\kappa = 3$) с точностью до 2 %. Статистические результаты исследования нормального свойства числа π, проверка математической гипотезы о нормальном распределении частоты символов приведены на рис. 3.

На рис. 4 представлен сюжет «Черно-белое поле числа π», наглядная графическая иллюстрация одномерных и двумерных кортежей в структуре фундаментальной константы на компьютере. Цифры двоичной кодировки представлены белым и черным цветом. Примечательно, что при заданной выборке массива данных число белых квадратиков примерно совпадает с числом черных. Это одно из проявлений нормального свойства числа π.

Рис. 4. Двоичное представление числа π в компьютерной графике

Творческая деятельность при решении занимательных задач предполагает не простой «набор», а различные сочетания интеллектуальных умений. Более того, в процессе решения новых проблем, постановки новых экспериментов развиваются новые умения.

Литература

1. *Фритцш Х.* Фундаментальные физические постоянные. Успехи физических наук. Т. 179, № 4, 2009.

2. Журнал Квант. 1985, № 11.

3. *Жуков А.В.* Вездесущее число π. М.: Едиториал УРСС, 2004.

4. *Кондратьев А.С., Филиппов М.Э.* Физические задачи и математическое моделирование реальных процессов. Учебно-методическое пособие для учителя. СПб.: Изд-во РГПУ им. А.И. Герцена, 2001.

5. *Перельман Я.И.* Занимательная физика. М.: ООО «Фирма «Издательство АСТ», 1999.

6. *Арнольд В.И.* Математика и физика: родитель и дитя или сестры. // УФН, 1999. Т. 169, № 12.

Abstract

The computing algorithms of π in physics and mathematics. The results of computer simulations with the number π. In the particular case of the normal properties of the fundamental constants.

Keywords: number of π, computer experiment, the computing algorithm, fundamental constants, normal property of number.

Ходанович Александр Иванович,
доктор педагогических наук,
профессор кафедры методики обучения физике
РГПУ им. А.И. Герцена,
akhodanovich@yandex.ru