

## СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА (60 лет маятнику Капицы)

### Аннотация

В статье приведено наглядное физическое объяснение параметрического резонанса, вызываемого принудительными вертикальными колебаниями точки подвеса маятника. Подробно рассмотрено явление динамической стабилизации перевернутого маятника при быстрых осцилляциях подвеса. Компьютерное моделирование и аналитическое исследование взаимно дополняют и обогащают друг друга, способствуя пониманию сложного поведения маятника.

**Ключевые слова:** колебания, параметрический резонанс, перевернутый маятник, динамическая стабилизация, критерий устойчивости, эффективный потенциал.

### ВВЕДЕНИЕ: ИЗУЧАЕМАЯ ФИЗИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

В этой статье рассматривается обычный жесткий маятник, подвес которого совершает принудительные колебания в вертикальном направлении. Эта сравнительно простая механическая система демонстрирует, в зависимости от частоты и амплитуды вынужденных колебаний точки подвеса, большое число разнообразных видов движения. Некоторые движения представляются весьма необычными и противоречат нашей интуиции.

Когда частота вынужденных осцилляций точки подвеса приблизительно вдвое больше частоты собственных колебаний маятника, нижнее положение равновесия становится неустойчивым: амплитуда первоначально сколь угодно малых колебаний маятника начинает прогрессивно нарастать со временем. Это хорошо известное явление называется *параметрическим резонансом*.

© Е.И. Бутиков, 2010

Интересная черта в поведении жесткого маятника с осциллирующим подвесом заключается в *динамической стабилизации перевернутого положения*. При достаточно больших значениях частоты и амплитуды осцилляций подвеса приведенный в перевернутое положение маятник не обнаруживает тенденции к опрокидыванию. Более того, при умеренных отклонениях от вертикали маятник стремится к этому перевернутому положению. Если маятник отклонить от вертикали, он будет совершать сравнительно медленные колебания около перевернутого положения на фоне быстрых осцилляций подвеса. Теоретическое предсказание этого удивительного явления впервые было сделано Стефенсоном [1] еще в 1908 году. Физическое объяснение динамической стабилизации перевернутого маятника было предложено академиком Петром Леонидовичем Капицей в 1951 году, выполнившим также и детальное экспериментальное исследование этого явления (см. [2, 3]).

Приведем цитату из статьи Капицы, опубликованной в журнале «Успехи физических наук» [3]:

«Демонстрация явления колебания перевернутого маятника весьма эффектна, быстрые мелкие передвижения, вызванные вибрациями, не заметны на-глаз, поэтому поведение маятника в перевернутом положении производит на зрителя неожиданное впечатление... Если осторожно прикоснуться пальцем к стержню маятника и отводить его в сторону, то палец чувствует давление, производимое вибрационным моментом. После ознакомления на опыте с динамической устойчивостью маятника в перевернутом положении трудно не прийти к выводу, что она так же поучительна, как и динамическая устойчивость волчка, и ей также следует занять почетное место в лектории на демонстрациях по механике».

Для демонстрации этого явления можно использовать старую электробритву вибрационного типа, как показано на рис. 1. К вибратору прикреплен удлинитель для увеличения амплитуды осцилляций подвеса маятника. Легкий жесткий стержень маятника соединен с концом удлинителя через шарнир. Корпус бритвы удерживается рукой в таком положении, чтобы вибрация оси происходила в вертикальном направлении. Если стержень маятника привести в вертикальное перевернутое положение, он остается в этом положении до тех пор пока ось вибрирует. Если стержень маятника немного отвести в сторону и отпустить, наблюдаются колебания около перевернутого положения.

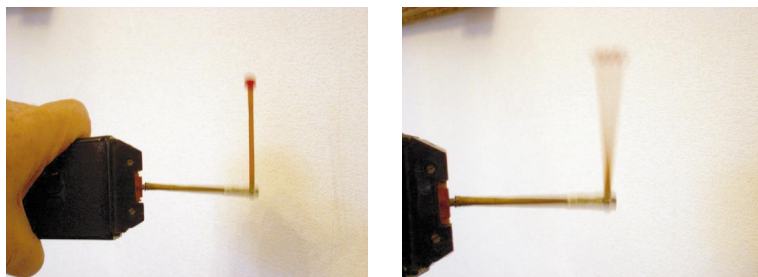


Рис. 1. Демонстрация динамической стабилизации перевернутого маятника

Неудивительно, что эта интригующая система (получившая название «маятник Капицы») привлекла затем внимание многих исследователей. Поэтому может сложиться впечатление, что теория явления хорошо разработана (см., например, курс теоретической физики Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица [4]). Подробную библиографию исследований на эту тему, насчитывающую сотни наименований, можно найти, например, в монографии И.И. Блехмана [5]. Однако во всей доступной литературе автору не удалось найти достаточно простое и ясное объяснение стабилизации перевернутого маятника. Это явление несомненно бросает вызов нашей физической интуиции. Главная цель данной статьи – предложить наглядное физическое объяснение динамической стабилизации перевернутого маятника. Мы также сосредоточим здесь внимание на приближенной количественной теории (приводящей к известному представлению об эффективном потенциале для медленного движения маятника), которая может быть развита на основе обсуждаемого здесь подхода к проблеме.

На протяжении последних десятилетий в научной печати регулярно появляются сообщения о все новых чертах в поведении этой простой, но поистине неисчерпаемой системы (см., например, [6–16]). Среди сравнительно недавних открытий можно выделить дестабилизацию (динамически стабилизированного) перевернутого положения маятника при достаточно больших амплитудах вибрации подвеса [6–7]. Эта дестабилизация проявляется как возбуждение так называемой «флаттер»-моды колебаний с периодом, вдвое превышающим период вынужденных осцилляций подвеса. Другое заслуживающее внимания открытие – регулярные  $n$ -периодические моды «кивающих» колебаний («multiple-nodding» oscillations) [8].

В следующей статье мы покажем, что происхождение «флаттер»-моды колебаний тесно связано с обычным параметрическим резонансом, то есть с хорошо известным явлением параметрической неустойчивости неперевернутого маятника. Мы также покажем, что «квивающие»  $n$ -периодические колебания можно интерпретировать как субгармонические параметрические резонансы высоких порядков. При этом будет получен более точный (и применимый в более широкой области параметров системы) критерий стабилизации перевернутого маятника. Теоретическое изучение дополняется компьютерным моделированием, иллюстрирующим различные экзотические режимы поведения маятника с осциллирующим подвесом [17]. Компьютерную программу, моделирующую маятник Капицы, можно найти на прилагаемом к журналу диске.

## 2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ РЕЗОНАНС

Будем для простоты рассматривать маятник в виде легкого жесткого стержня длиной  $l$  с грузом (точечной массой)  $m$  на конце, считая, что именно здесь сосредоточена вся масса маятника. Сила тяжести  $mg$  создает возвращающий момент  $-mgl \sin \varphi$ , пропорциональный синусу угла отклонения  $\varphi$  маятника от положения равновесия. Когда подвес маятника неподвижен, этот момент заставляет отклоненный маятник совершать колебания относительно нижнего положения устойчивого равновесия. Если же подвес принудительно движется с некоторым ускорением, поведение маятника удобно описывать с помощью неинерциальной системы отсчета, связанной с подвесом. Из-за ускоренного движения такой системы отсчета на все тела, наряду с «обычными» силами, действует еще и сила инерции («псевдосила»), направленная противоположно ускорению системы отсчета. Допустим, что подвес осциллирует вдоль вертикали и его координата  $z(t)$  изменяется со временем по гармоническому закону с некоторой частотой  $\omega$  и амплитудой  $a$ :

$$z(t) = a \cos \omega t \text{ или } z(t) = a \sin \omega t. \quad (1)$$

В зависимости от характера решаемой задачи в (1) может оказаться удобным тот или иной выбор начальной фазы осцилляций подвеса (выбор начала отсчета времени). Приложенная к грузу маятника сила инерции  $F_{in}(t)$  также зависит от времени по синусоидальному закону:

$$F_{in}(t) = -m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = -m \ddot{z}(t) = m \omega^2 z(t). \quad (2)$$

Эта периодически изменяющаяся сила инерции эквивалентна модуляции силы тяжести. В самом деле,  $F_{in}(t)$  направлена вниз в течение тех интервалов времени, когда осциллирующий подвес находится ниже своего среднего положения, то есть когда  $z(t) < 0$ . Это непосредственно видно из выражения (2) для  $F_{in}(t)$ , правая часть которого зависит от времени так же, как и  $z$ -координата подвеса. Поэтому на протяжении соответствующей половины периода колебаний подвеса действие силы инерции равносильно некоторому увеличению силы тяжести. На протяжении другой половины периода, когда подвес находится выше среднего положения (когда  $z(t) > 0$ ), сила инерции направлена вверх, что равносильно уменьшению силы тяжести.

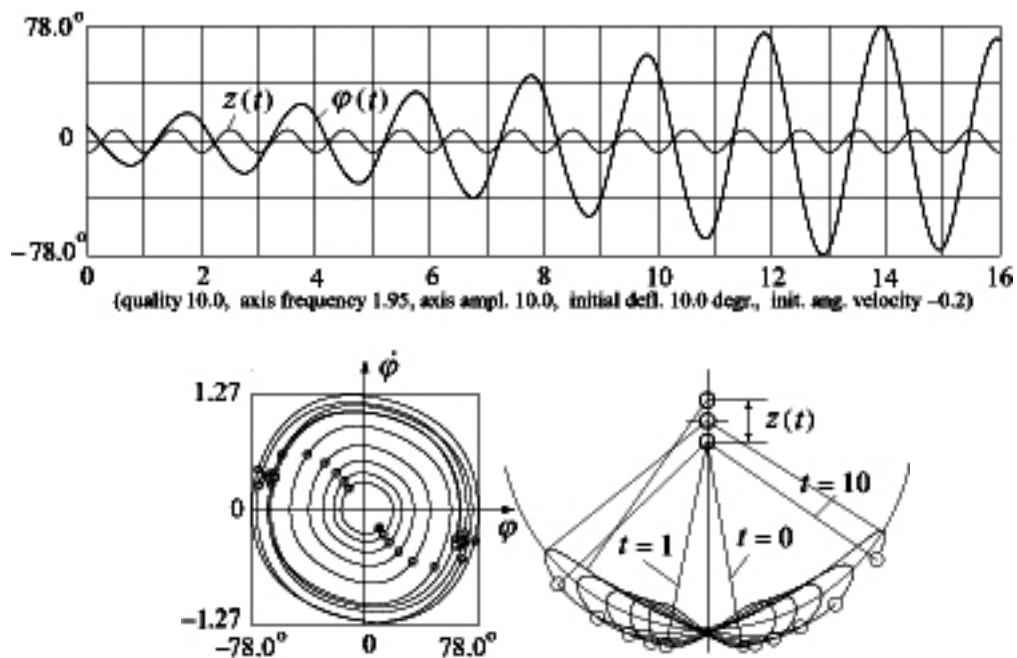
Принимая во внимание такое периодическое изменение (модуляцию) эффективной силы тяжести, легко понять причину раскачки маятника при параметрическом резонансе, когда два цикла модуляции происходят на протяжении одного периода собственных колебаний (рис. 2). В самом деле, пусть при движении маятника к положению равновесия от точки наибольшего отклонения (это четверть собственного периода) осциллирующий подвес все время находится ниже среднего положения, то есть  $z(t) < 0$  (что занимает половину периода осцилляций). Благодаря увеличению эффективной силы тяжести маятник придет к положению равновесия с большей скоростью, чем в отсутствие осцилляций подвеса. В момент прохождения маятником вертикального положения движущийся вверх подвес пе-

ресекает свое среднее положение. При движении маятника к точке наибольшего отклонения осциллирующий подвес находится выше среднего положения ( $z(t) > 0$ , рис. 2), что, как мы видели, равносильно уменьшению силы тяжести. В результате маятник отклонится на больший угол, чем при неподвижном подвесе. При обратном движении к положению равновесия эффективная сила тяжести опять увеличивается, и маятник набирает еще большую скорость, и т. д. Для наиболее интенсивной раскачки частота принудительных осцилляций подвеса должна быть вдвое больше частоты собственных колебаний маятника, и фазовые соотношения должны быть такими, чтобы в моменты прохождения маятником положения равновесия подвес двигался вверх и пересекал свое среднее положение.

Увеличение энергии маятника происходит за счет работы, совершаемой источником, возбуждающим осцилляции подвеса. Размах колебаний растет, если вложение энергии за период превосходит потери из-за трения, то есть когда ампли-

туда принудительных осцилляций подвеса превосходит некоторое пороговое значение. В отличие от обычного резонанса, возбуждаемого прямым воздействием периодической силы и происходящего при совпадении ее частоты с собственной частотой маятника, при параметрическом резонансе трение не в состоянии ограничить рост амплитуды. Размах установившихся колебаний маятника оказывается конечным из-за того, что с ростом амплитуды в этой нелинейной системе возрастает период собственных колебаний. При неизменном периоде осцилляций точки подвеса возрастание собственного периода приводит к нарушению условий параметрического резонанса. Амплитуда начинает убывать, условия резонанса снова восстанавливаются, что опять приводит к росту амплитуды, и так далее. Из-за трения такие переходные биения постепенно затухают, и в конце концов устанавливаются периодические колебания неизменного размаха.

В нижней части рис. 2 слева приведена фазовая траектория резонансной рас-



**Рис. 2.** График угла отклонения, фазовая траектория (с сечениями Пуанкаре) и траектория груза маятника в пространстве при параметрическом резонансе. Шкала времени проградуирована в периодах принудительных осцилляций подвеса

качки маятника. Сечения Пуанкаре на ней показывают состояние маятника в моменты времени, когда осциллирующий подвес находится в крайнем нижнем положении. В процессе установления колебаний раскручивающаяся фазовая траектория приближается к замкнутой кривой – предельному циклу, соответствующему периодическому процессу, а множество сечений Пуанкаре стягивается к двум неподвижным точкам на фазовой плоскости. Внизу справа на рис. 2 показана траектория груза маятника в пространстве для процесса параметрической раскачки.

Показанные на рис. 2 график и фазовая траектория получены численным интегрированием дифференциального уравнения для угла отклонения  $\varphi(t)$  маятника с осциллирующим подвесом. В это уравнение, наряду с моментом силы тяжести  $mg$  ( $g$  – ускорение свободного падения), включен момент силы инерции  $F_{in}(t)$ , который явно зависит от времени  $t$ :

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \left(\frac{g}{l} - \frac{a}{l}\omega^2 \cos \omega t\right) \sin \varphi = 0. \quad (3)$$

Второй член в (3) учитывает момент силы трения, который в этой модели принят пропорциональным мгновенному значению угловой скорости маятника  $\dot{\varphi}$ . Постоянная затухания  $\gamma$  обратно пропорциональна добротности  $Q$ , которую обычно используют для характеристики затухания малых собственных колебаний под действием вязкого трения:  $Q = \omega_0 / 2\gamma$ , где  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$  – частота собственных колебаний предельно малой амплитуды в отсутствие осцилляций подвеса.

Отметим, что колебания около перевернутого положения можно формально описывать тем же самым дифференциальным уравнением (3) с отрицательными значениями  $g$ . Иными словами, в уравнении (3) ускорение свободного падения  $g$  можно рассматривать как управляющий параметр, изменение которого физически эквивалентно изменению действующей на маятник силы тяжести. Когда этот параметр уменьшается до нуля и дальше в

область отрицательных значений, не зависящий от времени (обусловленный силой тяжести) момент в уравнении (3) сначала обращается в нуль, а затем изменяет знак на противоположный. Подобная обращенная по направлению «сила тяжести» стремится привести маятник в перевернутое положение  $\varphi = \pi$ , отчего (в отсутствие вибраций подвеса) оно становится устойчивым, а положение  $\varphi = 0$  – неустойчивым: при  $g < 0$  верхнее положение маятника в уравнении (3) эквивалентно нижнему положению при положительном значении  $g$ .

### 3. ДИНАМИЧЕСКАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА

Для физического объяснения эффекта динамической стабилизации перевернутого маятника при быстрых осцилляциях подвеса нужно принять во внимание действие на маятник силы инерции, усредненное по периоду этих быстрых осцилляций. Согласно формуле (2) сила инерции изменяется со временем по синусоидальному закону, её среднее за период значение равно нулю. Но оказывается, что среднее значение *момента* этой силы относительно оси вращения маятника отлично от нуля. Именно средний момент силы инерции отвечает за необычное, противоречащее нашей интуиции поведение маятника.

Чтобы было проще понять влияние силы инерции на маятник, забудем на некоторое время о силе тяжести. Начнем наш анализ со случая, когда стержень маятника отклонен в горизонтальное положение, то есть ориентирован под прямым углом  $\psi = \pi/2$  к направлению осцилляций подвеса (см. рис. 3 а). Если начальная скорость груза равна нулю, то в инерциальной системе отсчета в отсутствие силы тяжести он будет оставаться на том же уровне, в то время как ось А осциллирует между крайними точками 1 и 2. При этом стержень маятника поворачивается вниз и вверх на небольшой угол, как показано в верхней части рис. 3 а. В неинерциальной

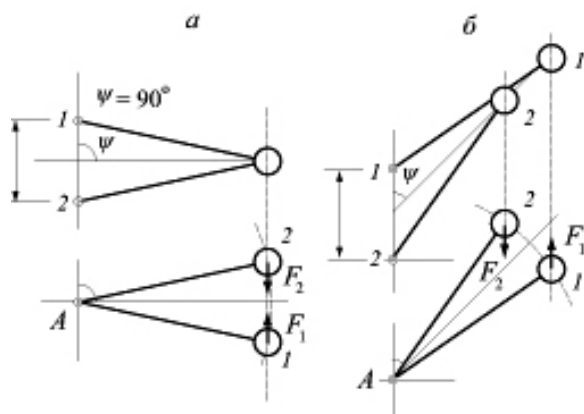


ной системе отсчета, связанной с осью маятника, это же движение стержня маятника показано в нижней части рис. 3а: груз маятника движется вверх-вниз по дуге и оказывается в крайних точках, когда ось занимает положения 1 и 2. В положении 1 приложенная к грузу сила инерции  $F_1$  направлена вверх, а в другом крайнем положении 2 такая же по величине сила  $F_2$  направлена вниз. Плечо силы инерции в положениях 1 и 2 одинаково, поэтому момент этой силы, усредненный за период осцилляций оси, равен нулю. Это значит, что в отсутствие силы тяжести такая ориентация стержня маятника (перпендикулярно к направлению осцилляций оси) соответствует положению динамического равновесия (неустойчивому, как будет показано ниже).

Теперь рассмотрим случай, когда стержень маятника в среднем отклонен на произвольный угол  $\psi$  от направления осцилляций подвеса. Пусть ось  $A$  перемещается между крайними точками 1 и 2, как показано в верхней части рис. 3 б. В неинерциальной системе отсчета, связанной с подвесом, груз маятника движется вверх-вниз по дуге, центр которой совпадает с осью  $A$ . Груз оказывается в крайних точках, когда ось занимает положения 1 и 2, как показано в нижней части рис. 3 б. Отметим, что мгновенная ориентация стержня маятника в момент 1 одинакова в обеих системах отсчета. В момент 2 (как и в любой другой момент) ориентация стержня также одинакова. Когда ось смещена вверх (в точку 1) из своего среднего положения, действующая на груз маятника сила инерции  $F_1$  также направлена вверх. В другом крайнем положении 2 сила инерции  $F_2$  направлена вниз. Силы инерции  $F_1$  и  $F_2$  в крайних положениях оси одинаковы по величине, но *момент* силы инерции  $F_1$  в положении 1 больше, чем момент силы инерции  $F_2$  в положении 2, поскольку *плечо* силы  $F_1$  больше, чем силы  $F_2$ . Это легко видеть из рис. 3 б. Поэтому в среднем за период осцилляций оси сила инерции создает момент, который стремится повернуть маятник вверх, в вертикальное перевернутое положение, в котором стержень маятника ориентирован вдоль направления осцилляций оси. Если бы стержень маятника был отклонен на некоторый (острый) угол от нижнего вертикального положения, то средний момент силы инерции стремился бы повернуть стержень маятника вниз.

Таким образом, момент силы инерции, усредненный по периоду быстрых осцилляций оси, стремится установить стержень маятника по направлению принудительных колебаний подвеса. Правая часть рис. 3 б дает предельно простое и ясное объяснение происхождения этого момента. П.Л. Капица (см. [2, 3]) назвал этот ориентирующий момент *вибрационным*, но в равной мере справедливо называть этот момент *инерционным*, потому что его происхождение обусловлено силой инерции, возникающей в связанной с подвесом системе отсчета из-за быстрых осцилляций оси маятника. Именно средний момент силы инерции дает наглядное объяснение существованию двух устойчивых положений равновесия маятника, соответствующих его ориентации вдоль направления колебаний оси. При заданных значениях частоты и амплитуды колебаний подвеса этот средний момент, как и момент силы тяжести, зависит только от угла отклонения маятника. В поле тяжести переверну-

того маятника в момент 1 одинакова в обеих системах отсчета. В момент 2 (как и в любой другой момент) ориентация стержня также одинакова. Когда ось смещена вверх (в точку 1) из своего среднего положения, действующая на груз маятника сила инерции  $F_1$  также направлена вверх. В другом крайнем положении 2 сила инерции  $F_2$  направлена вниз. Силы инерции  $F_1$  и  $F_2$  в крайних положениях оси одинаковы по величине, но *момент* силы инерции  $F_1$  в положении 1 больше, чем момент силы инерции  $F_2$  в положении 2, поскольку *плечо* силы  $F_1$  больше, чем силы  $F_2$ . Это легко видеть из рис. 3 б. Поэтому в среднем за период осцилляций оси сила инерции создает момент, который стремится повернуть маятник вверх, в вертикальное перевернутое положение, в котором стержень маятника ориентирован вдоль направления осцилляций оси. Если бы стержень маятника был отклонен на некоторый (острый) угол от нижнего вертикального положения, то средний момент силы инерции стремился бы повернуть стержень маятника вниз.



**Рис. 3.** Силы инерции  $F_1$  и  $F_2$ , действующие на маятник в неинерциальной системе отсчета, в моменты времени, когда осциллирующая ось  $A$  находится в крайних положениях 1 и 2 соответственно

тый маятник устойчив по отношению к малым отклонениям от вертикали при условии, что средний момент силы инерции больше, чем опрокидывающий момент силы тяжести.

#### 4. ПРИБЛИЖЕННАЯ КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ПЕРЕВЕРНУТОГО МАЯТНИКА

На основе приведенной выше наглядной картины можно сформулировать количественный критерий динамической стабилизации перевернутого маятника в поле тяжести. Быстрые осцилляции подвеса обеспечивают устойчивость перевернутого маятника, если при малых отклонениях момент силы инерции, усредненный по периоду осцилляций (этот момент стремится вернуть маятник в перевернутое положение), превосходит момент силы тяжести, стремящийся опрокинуть маятник.

При быстрых осцилляциях точки подвеса движение маятника можно представить, следуя П.Л. Капице [2–3]), как суперпозицию двух компонент: медленного движения, для которого характерно малое изменение угла ориентации стержня

за период вынужденных осцилляций оси, и быстрого («вибрационного») движения. Можно представить себе наблюдателя, который не замечает мелкомасштабную и малозаметную для глаза вибрационную составляющую этого составного движения (или, по выражению И.И. Блехмана [5], «не хочет замечать»). Если такой наблюдатель будет использовать стробоскопическое освещение с интервалом между вспышками, равным периоду осцилляций подвеса, он сможет видеть только медленную компоненту движения маятника. Наша основная задача как раз и состоит в нахождении этой медленной компоненты.

Когда стержень маятника отклонен от нижнего положения равновесия в среднем на угол  $\psi$ , мгновенное значение угла отклонения  $\varphi(t)$  из-за принудительных осцилляций оси подвержено быстрым синусоидальным колебаниям с частотой  $\omega$  около этого среднего значения  $\psi = \langle \varphi(t) \rangle$ . Это ясно видно из графиков зависимости угла отклонения  $\varphi(t)$  от времени, показанных на рис. 4. Поэтому можно искать мгновенное значение угла отклонения  $\varphi(t)$  как сумму медленно изменяющейся фун-

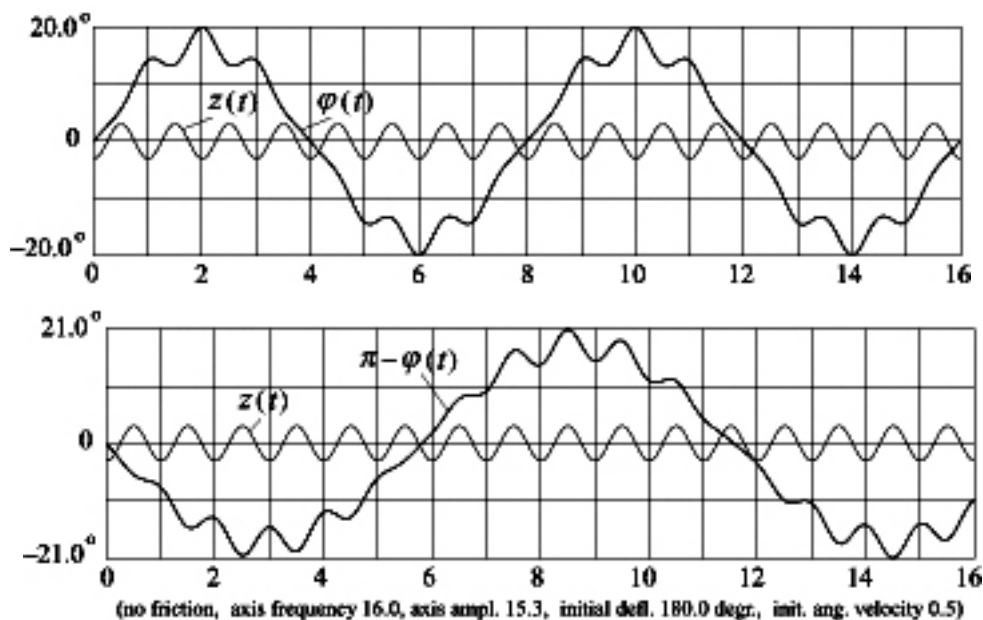


Рис. 4. Графики угла отклонения  $\omega(t)$  при колебаниях маятника около нижнего и верхнего положений равновесия вместе с графиком  $z(t) = -a\cos\omega t$  вынужденных осцилляций оси. Графики получены численным интегрированием дифференциального уравнения (3)

кции  $\psi(t)$  и быстрого слагаемого  $\delta(t)$ , среднее значение которого равно нулю. Быстрый член  $\delta(t)$  совершает колебания с высокой частотой  $\omega$  принудительных колебаний оси. Как видно из рис. 3 б, угловая амплитуда этих быстрых колебаний пропорциональна синусу среднего угла отклонения  $\psi$ :

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \psi(t) + \delta(t) = \psi(t) - \frac{z(t)}{l} \sin \psi = \\ &= \psi(t) - \frac{a}{l} \sin \psi \cos \omega t.\end{aligned}\quad (4)$$

Здесь использовано выражение (1) для мгновенного положения оси  $z(t)$ , в котором  $a$  – амплитуда принудительных колебаний оси,  $l$  – длина маятника. Знак второго слагаемого в (4) объясняется тем, что когда ось находится выше своего среднего положения, то есть значение  $z$  положительно, дополнительный угол  $\delta = -(z/l) \sin \psi$  отрицателен, и наоборот (см. рис. 3 б). Ниже мы получим дифференциальное уравнение для искомой медленно изменяющейся функции  $\psi(t)$ , которая описывает движение маятника, усредненное по периоду быстрых осцилляций.

Момент силы инерции зависит от ее мгновенного значения  $ma\omega^2 \cos \omega t$  (см. (2)) и от синуса угла  $\varphi$ . Осцилляции оси приводят лишь к небольшим отклонениям угла  $\varphi$  от его среднего значения  $\psi$  (то есть  $\delta(t) \ll 1$  для любого  $t$ ), поэтому для синуса угла  $\varphi$  можно написать следующее приближенное выражение:

$$\sin \varphi = \sin(\psi + \delta) \approx \sin \psi + \delta \cos \psi. \quad (5)$$

Используя это выражение и считая  $\psi$  практически неизменным на протяжении периода осцилляций оси, находим приближенное значение момента силы тяжести относительно оси маятника, усредненное по периоду быстрых осцилляций оси:

$$\begin{aligned}\langle -mgl \sin \varphi \rangle &= -mgl \langle \sin(\psi + \delta) \rangle = \\ &= -mgl \sin \psi.\end{aligned}\quad (6)$$

Здесь учтено, что среднее значение  $\delta(t)$  равно нулю:  $\langle \delta(t) \rangle = 0$ . Таким образом, среднее значение момента силы тя-

жести будет таким же, как в случае неподвижного подвеса: второй (осциллирующий) член в выражении (4) для мгновенного значения угла отклонения, будучи умноженным на постоянную (не зависящую от времени) силу тяжести, не дает вклада в средний момент сил. Напротив, при усреднении по времени момента осциллирующей силы инерции вклад первого члена разложения (4) обращается в нуль, но второй член дает ненулевой вклад в средний момент. Так происходит благодаря одинаковой синусоидальной зависимости от времени как  $\delta(t)$ , так и силы инерции  $F_{in}(t)$  (см. (2)):

$$\begin{aligned}\langle F_{in}(t) l \sin(\psi + \delta) \rangle &= \\ &= -ma\omega^2 l (a/l) \cos \psi \sin \psi \langle \cos^2 \omega t \rangle = \\ &= -\frac{1}{2} ma^2 \omega^2 \cos \psi \sin \psi = \\ &= -\frac{1}{4} ma^2 \omega^2 \sin 2\psi.\end{aligned}\quad (7)$$

Здесь учтено, что среднее за период значение квадрата косинуса равно  $1/2$ :  $\langle \cos^2 \omega t \rangle = 1/2$ . В случае  $\psi > \pi/2$  средний момент силы инерции положителен: когда маятник образует острый угол с направлением вверх, этот момент стремится повернуть стержень маятника в перевернутое положение. Сравнивая правые части выражений (6) и (7), можно найти условие, при котором момент силы инерции, действующий на отклоненный из перевернутого положения маятник, превосходит момент силы тяжести, стремящейся привести маятник в нижнее положение:

$$a^2 \omega^2 > 2gl. \quad (8)$$

Таким образом, перевернутое положение маятника устойчиво, если максимальная скорость  $\omega a$  осциллирующей оси больше, чем скорость  $\sqrt{2gl}$ , которую тело, свободно падающее в поле тяжести, приобретает при падении с высоты, равной длине маятника  $l$ . Критерий устойчивости перевернутого маятника (8) можно представить в другой форме, если воспользоваться выражением  $\omega_0^2 = g/l$  для частоты



ты малых собственных колебаний маятника (в отсутствие осцилляций подвеса). Подставляя  $g = l\omega_0^2$  в (8), получаем:

$$\frac{a}{l} \cdot \frac{\omega}{\omega_0} > \sqrt{2}. \quad (9)$$

Согласно критерию (9), произведение безразмерной относительной амплитуды  $al$  и относительной частоты  $\omega/\omega_0$  осцилляций подвеса должно превышать  $\sqrt{2}$ . Например, для маятника длиной  $l = 20$  см при частоте вибраций оси  $f = \omega/2\pi = 100$  Гц амплитуда  $a$  этих вибраций должна превышать 3.2 мм. Для физического маятника критерий динамической стабилизации перевернутого положения дается такими же выражениями (8) или (9), если в них в качестве  $l$  подставлять приведенную длину маятника  $l_{md}$ , где  $I$  – момент инерции относительно оси вращения,  $m$  – масса маятника и  $d$  – расстояние от оси вращения до центра масс. Отметим, что критерий (8) или (9) не зависит от трения.

При малых относительных амплитудах  $al$  и высоких относительных частотах  $\omega/\omega_0$  осцилляций подвеса критерий (9) согласуется с нижней границей устойчивости перевернутого маятника, которую можно найти путем аппроксимации нелинейного дифференциального уравнения движения маятника (3) уравнением Матье, свойства решений которого детально описаны в обширной литературе по этой проблеме (см., например [8], [9] или [10]). Однако исследования, основанные на уравнении Матье, диаграммах Айнса–Стрэтта и бесконечных детерминантах Хилла, представляются неоправданно сложными для решения данной задачи. Кроме того, они не дают ясной физической картины динамической стабилизации перевернутого маятника и, что более важно, применимы лишь при малых углах отклонения от вертикали. Напротив, предложенный П.Л. Капицей подход, основанный на разделении быстрого и медленного движений маятника, дает очень простое и наглядное объяснение этому неожиданному явлению. Подчеркнем, что он применим лишь при достаточно высокой частоте и малой амплитуде осцилляций подвеса, но свободен от ограничения малыми отклонениями маятника.

литуде осцилляций подвеса, но свободен от ограничения малыми отклонениями маятника.

Для заданных значений частоты  $\omega$  и амплитуды  $a$  осцилляций подвеса, при которых выполнено условие (8) или (9), можно найти максимально допустимое значение среднего отклонения маятника от перевернутого положения  $\theta_{\max} = \pi - \psi_0$ , в пределах которого маятник будет возвращаться в перевернутое положение. Для этого достаточно приравнять правые части выражений (6) и (7), которые определяют средний момент силы тяжести, стремящийся опрокинуть маятник, и средний момент силы инерции, стремящийся вернуть маятник в перевернутое положение:

$$\cos\theta_{\max} = -\cos\psi_0 = \frac{2gl}{a^2\omega^2} = 2\left(\frac{\omega_0 l}{\omega a}\right)^2. \quad (10)$$

Это выражение для допустимого углового отклонения маятника от перевернутого положения справедливо для произвольно больших значений  $\psi$ . Чем больше произведение  $\omega a$  частоты и амплитуды осцилляций подвеса, тем ближе к  $\pi/2$  максимально допустимое отклонение маятника  $\theta_{\max}$  от перевернутого положения. Если маятник отклонить на угол, меньший  $\theta_{\max}$ , маятник будет совершать сравнительно медленные колебания около перевернутого положения. Это медленное движение происходит в результате совместного действия среднего момента силы инерции и силы тяжести. На медленное движение маятника налагаются быстрые колебания с частотой вынужденных осцилляций подвеса (рис. 4). Под действием трения медленная компонента движения постепенно затухает, и в конце концов маятник устанавливается в перевернутом положении.

Аналогичное поведение маятника наблюдается и при отклонении от нижнего положения равновесия. Но в этом случае частота медленных колебаний маятника больше, чем около перевернутого положения. Действительно, ведь в этом случае и средний момент силы инерции, и мо-

мент силы тяжести стремятся вернуть маятник в нижнее положение. Поэтому частота таких медленных колебаний выше частоты собственных колебаний маятника в отсутствие вибраций оси. Как отмечал П.Л. Капица, маятниковые часы на вибрирующем основании всегда спешат.

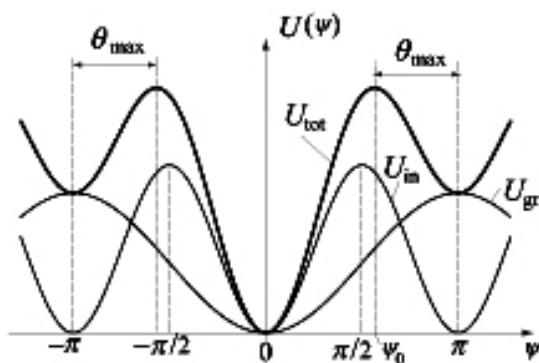
### 5. ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ДЛЯ МЕДЛЕННОГО ДВИЖЕНИЯ МАЯТНИКА

Приближенное дифференциальное уравнение для медленной компоненты движения  $\psi(t)$  в неинерциальной системе отсчета, связанной с осью, можно написать в предположении, что угловое ускорение маятника  $\ddot{\psi}(t)$  в этом медленном движении определяется суммарным моментом  $N(\psi)$  действующих на маятник сил, усредненным по периоду быстрых осцилляций оси. Учитывая моменты силы тяжести  $mg \sin \psi$  и силы инерции (2), получаем:

$$\ddot{\psi} = -\omega_0^2 \sin \psi - \frac{1}{2} \frac{a^2}{l^2} \omega^2 \cos \psi \sin \psi. \quad (11)$$

Средний момент сил в правой части (11) рассчитан приближенно в предположении, что медленно изменяющаяся координата  $\psi(t)$  «заморожена».

Для наглядности медленное движение маятника  $\psi(t)$ , которое только и видит упоминавшийся выше наблюдатель, не за-



**Рис. 5.** Графики потенциальной энергии в поле тяжести  $U_{gr}(\psi)$ , потенциальной энергии  $U_{in}(\psi)$ , соответствующей моменту средней силы инерции, и полной потенциальной энергии  $U(\psi) = U_{tot}(\psi)$  для маятника с осциллирующим подвесом

мечающий малых быстрых осцилляций, удобно представлять как движение частицы в эффективном потенциальном поле, описываемом функцией  $U = U(\psi)$ , такой, что момент сил  $N(\psi) = -dU(\psi)/d\psi$ . Впервые такой эффективный потенциал был предложен Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшицем [4] и впоследствии вводился разными методами в других исследованиях (см, например [11], [12] или [13]). Эффективный потенциал состоит из двух частей:  $U_{gr}(\psi)$  и  $U_{in}(\psi)$ , описывающих соответственно действие силы тяжести и средней силы инерции:

$$U(\psi) = U_{gr}(\psi) + U_{in}(\psi) = mgl(1 - \cos \psi) + \frac{1}{4} ma^2 \omega^2 (1 - \cos 2\psi). \quad (12)$$

Графики  $U_{gr}(\psi)$  и  $U_{in}(\psi)$  показаны на рис. 5. Оба графика имеют синусоидальную форму, но период  $U_{in}(\psi)$  вдвое меньше периода  $U_{gr}(\psi)$ . Их минимумы при  $\psi = 0$  совпадают, образуя абсолютный минимум полной функции  $U(\psi) = U_{tot}(\psi)$ . Этот минимум соответствует нижнему устойчивому положению равновесия маятника. Но соседний минимум  $U_{in}(\psi)$  расположен при  $\psi = \pi$ , где  $U_{gr}(\psi)$  имеет максимум, соответствующий перевернутому маятнику.

Если выполняется критерий устойчивости перевернутого маятника (8) или (9), полный потенциал  $U = U(\psi)$  (12) имеет (помимо абсолютного минимума при  $\psi = 0$ , соответствующего нижнему положению равновесия) относительные минимумы при  $\psi = \pm\pi$ . Эти дополнительные минимумы соответствуют перевернутому положению маятника. Колебания частицы, захваченной в таком минимуме, описывают поведение маятника в окрестности перевернутого положения.

Медленные колебания малой амплитуды, происходящие вблизи дна каждой из этих потенциальных ям, будут почти гармоническими. Выражения для частот малых колебаний в этих ямах можно найти из дифференциального уравнения (11) для

медленного движения, положив в нем  $\sin\psi \approx \psi$ ,  $\cos\psi \approx 1$  при малых колебаниях около  $\psi = 0$  и  $\sin\psi = \sin(\pi - \theta) \approx \theta$ ,  $\cos\psi \approx -1$  при малых колебаниях около  $\psi = \pm\pi$ :

$$\begin{aligned} \ddot{\psi} &= -(\omega_0^2 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{l^2} \omega^2) \psi, \\ \ddot{\theta} &= -(-\omega_0^2 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{l^2} \omega^2) \theta. \end{aligned} \quad (13)$$

Из (13) следует, что частоты  $\omega_{\text{down}}$  и  $\omega_{\text{up}}$  колебаний маятника соответственно около нижнего ( $\psi = 0$ ) и верхнего ( $\psi = \pm\pi$ ) положений равновесия при малом размахе этих колебаний даются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{down}}^2 &= \frac{a^2 \omega^2}{2l^2} + \omega_0^2, \\ \omega_{\text{up}}^2 &= \frac{a^2 \omega^2}{2l^2} - \omega_0^2. \end{aligned} \quad (14)$$

Склоны мелких дополнительных минимумов имеют меньшую крутизну, чем склоны основного минимума. Поэтому частота  $\omega_{\text{up}}$  медленных колебаний около перевернутого положения ниже частоты  $\omega_{\text{down}}$  малых колебаний около нижнего положения равновесия.

Выражения (14) для частот медленных колебаний  $\omega_{\text{up}}$  и  $\omega_{\text{down}}$  иллюстрируются графиками на рис. 4, полученными с помощью численного интегрирования уравнения (3). Для наглядности выбран пример, в котором частота возбуждения  $\omega = 16\omega_0$ , а амплитуда  $a = 0.153l$ , так что  $(a^2/2l^2)\omega^2 = 3.0\omega_0^2$ . В этом случае выражения (14) дают для частот медленных колебаний около нижнего положения значение  $\omega_{\text{down}} = 2\omega_0$ , ровно вдвое превышающее собственную частоту. Тогда период медленных колебаний  $T_{\text{down}}$  должен быть вдвое меньше периода  $T_0$  собственных колебаний маятника в отсутствие осцилляций оси. Из рис. 4 видно, что маятник совершает ровно два медленных колебания на протяжении периода  $T_0$ , который в этом примере (при  $\omega = 16\omega_0$ ) составляет 16 периодов  $T = 2\pi/\omega$  принудительных ос-

цилляций оси. Шкала времени на графиках проградуирована в единицах  $T$ .

Для частоты медленных колебаний около перевернутого положения выражения (14) дают значение  $\omega_{\text{up}} = \sqrt{2} \omega_0$ , то есть период медленных колебаний  $T_{\text{up}} = T_0 \sqrt{2}$ . Это значение периода также хорошо подтверждается нижним графиком на рис. 4.

Графики на рис. 4 показывают, что медленное движение маятника наиболее сильно искажено высокочастотными колебаниями вблизи крайних отклонений маятника. Искажения графиков  $\varphi(t)$  сравнительно невелики, когда маятник пересекает положение равновесия. Такое поведение согласуется с выражением (4), согласно которому угловая амплитуда быстрых колебаний стержня маятника пропорциональна синусу среднего угла отклонения  $\psi$ , характеризующего медленную составляющую движения.

Если в формулах (14) положить  $\omega_0 = 0$ , мы получим выражение для частоты  $\omega_{\text{slow}}$  малых медленных колебаний маятника с осциллирующим подвесом в отсутствие силы тяжести:

$$\omega_{\text{slow}} = \frac{a}{\sqrt{2}l}. \quad (15)$$

Такие колебания могут происходить около каждого из двух динамически стабилизированных положений равновесия, симметрично расположенных в противоположных направлениях на линии осцилляций оси маятника. Когда осцилляции оси происходят при наличии силы тяжести, момент силы тяжести добавляется к среднему моменту силы инерции. Результирующий возвращающий момент вблизи нижнего положения возрастает, что приводит к увеличению соответствующей частоты медленных колебаний  $\omega_{\text{down}}$  по сравнению с  $\omega_{\text{slow}}$ . Вблизи верхнего положения сила тяжести уменьшает средний возвращающий момент силы инерции, уменьшая тем самым частоту  $\omega_{\text{up}}$  медленных колебаний перевернутого маятника.

Положения максимумов потенциальной энергии  $U = U(\psi)$  определяются формулами (10). Вершины потенциальных барьеров между соседними ямами соответствуют отклонениям  $\pm\psi_0$  ( $\psi_0 > \pi/2$ ) от нижнего вертикального положения и  $\pm\theta_{\max}$  ( $\theta_{\max} < \pi/2$ ) от верхнего (перевернутого) положения (рис. 5). При таких отклонениях средний момент силы тяжести уравновешен средним моментом силы инерции. Однако эти положения равновесия неустойчивы: при малейшем возмущении маятник медленно соскальзывает в одну из потенциальных ям и совершает в ней колебания, двигаясь от одного склона до другого. Форма таких колебаний сильно отличается от синусоидальной: маятник надолго задерживается вблизи вершины потенциального барьера (вблизи максимального отклонения), затем довольно быстро проходит над дном потенциальной ямы и медленно взбирается на противоположный склон перед тем, как начать обратное движение.

Полученные здесь приближенные результаты справедливы при достаточно высокой частоте  $\omega \gg \omega_0$  и малой амплитуде  $a \ll l$  вынужденных осцилляций подвеса. Из графика  $U = U(\psi)$  (рис. 5) следует, что нижнее положение равновесия всегда устойчиво, а верхнее перевернутое положение устойчиво, когда на кривой потенциальной энергии  $U = U(\psi)$  существуют дополнительные минимумы при  $\psi = \pm\pi$ , то есть при выполнении условия (8) или (9). Уточненный критерий динамической стабилизации перевернутого маятника,

справедливый в более широкой области параметров, в том числе при сравнительно низких частотах и больших амплитудах вынужденных осцилляций подвеса, будет получен в следующей статье на эту тему.

Как уже отмечалось выше, в определенных интервалах значений параметров системы (интервалах параметрической неустойчивости) нижнее положение равновесия маятника становится неустойчивым: наблюдается явление параметрического резонанса, при наступлении которого малые начальные колебания прогрессивно нарастают. Это никак не вытекает из приведенного здесь исследования, основанного на разложении движения маятника на быструю и медленную составляющие. Дело в том, что параметрический резонанс наступает при таких значениях параметров системы, где это разложение невозможно. В следующей статье будет показано, что и верхнее (динамически стабилизированное) положение тоже может стать неустойчивым: при достаточно большой амплитуде осцилляций подвеса возбуждаются колебания маятника около перевернутого положения с периодом, вдвое большим вынуждающего периода. Эта так называемая флаттер-мода колебаний родственна основному параметрическому резонансу неперевернутого маятника. Подчеркнем, что параметрический резонанс, флаттер-мода и другие сложные примеры поведения маятника имеют место при таких значениях частоты и амплитуды осцилляций подвеса, при которых наглядный метод разделения движения на быструю и медленную составляющие неприменим.

### Литература

1. A. Stephenson. On an induced stability. Phil. Mag. 1908, 15, p. 233–236; On a new type of dynamical stability. Mem. Proc. Manch. Lit. Phil. Soc. 1908, 52, p. 1–10.
2. П. Л. Капица. Динамическая устойчивость маятника при колеблющейся точке подвеса. ЖЭТФ, 1951, 21, с. 588–597.
3. П. Л. Капица. Маятник с вибрирующим подвесом. УФН, 1951, 44, 7–20.
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Механика. М.: «Наука», 1988. С. 123–125.
5. И. И. Блехман. Вибрационная механика. М.: «Наука», 1994. С. 95–106.
6. J. A. Blackburn, H. J. T. Smith, N. Groenbech-Jensen. Stability and Hopf bifurcations in an inverted pendulum. Am. J. Phys. 1992, 60, p. 903–908.
7. H. J. T. Smith, J. A. Blackburn. Experimental study of an inverted pendulum. Am. J. Phys. 1992, 60, p. 909–911.

8. *D.J. Acheson*. Multiple-nodding oscillations of a driven inverted pendulum. Proc. Roy. Soc. London, 1995, **A 448**, p. 89–95, A pendulum theorem. Proc. Roy. Soc. London, 1993, **A 443**, p. 239–245.
9. *F.M. Phelps III and J.H. Hunter Jr.* An analytical solution of the inverted pendulum. Am. J. Phys. 1965, **33**, p. 285–295; 1966, **34**, p. 533–535.
10. *D.J. Ness*. Small oscillations of a stabilized, inverted pendulum. Am. J. Phys. 1967, **35**, p. 964 – 967.
11. *W.T. Grandy Jr., M. Schöck*. Simulations of nolinear pivot-driven pendula. Am. J. Phys. 1997, **65**, p. 376–381.
12. *Julia G. Fenn, D.A. Bayne, B.D. Sinclair*. Experimental investigation of the «effective potential» of an inverted pendulum. Am. J. Phys. 1998, **66**, p. 981–984.
13. *E.I. Butikov*. On the dynamic stabilization of an inverted pendulum. Am. J. Phys. 2001, **69**, p. 755–768.
14. *E.I. Butikov*. Subharmonic Resonances of the Parametrically Driven Pendulum. Journal of Physics A: Mathematical and General. 2002, **35**, p. 6209–6231.
15. *Butikov E.I.* Regular and chaotic motions of the parametrically forced pendulum: theory and simulations. LNCS (Springer Verlag) 2331, p. 1154–1169 (2002).
16. *M.J. Clifford, S.R. Bishop*. Inverted oscillations of a driven pendulum. Proc. Roy. Soc. London, A 1998, **454**, p. 2811–2817.
17. *E.I. Butikov*. Pendulum with the vertically driven pivot. (Computer simulations of nonlinear oscillatory systems) // <http://faculty.ifmo.ru/butikov/Nonlinear>

#### Abstract

A simple physical explanation is suggested for parametric resonance caused by constrained vertical oscillations of the pivot. The phenomenon of dynamic stabilization of the inverted pendulum whose pivot is constrained to oscillate with a high frequency is considered in detail. A computer program simulating the physical system aids the analytical investigation of the subject in a manner that is mutually reinforcing.

**Keywords:** oscillations, parametric resonance, inverted pendulum, dynamic stabilization, stability criterium, effective potential.

*Бутиков Евгений Иванович,  
профессор физического факультета  
СПбГУ,  
eugene.butikov@gmail.com.*



Наши авторы, 2010.  
Our authors, 2010.