Образцова Светлана Анатольевна

К-СВЯЗНЫЕ ГРАФЫ

Аннотация

В статье приведён краткий анализ состояния проблемы о структуре k-связных графов.

Ключевые слова: k-связный граф.

НЕКОТОРЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОЯСНЕНИЯ

Начну я эту статью так, как начинаются сотни, а может быть, и тысячи статей по теории графов: «Под графом в данной работе понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер.» А что это значит? Граф – это множество вершин, соединенных ребрами (простейший пример графа любой из вас может увидеть, посмотрев на схему метро: станции – это вершины, а соединяющие их линии – ребра). Когда говорится «без петель и кратных ребер» имеется в виду, что вершины могут быть соединены не более чем одним ребром и ребро не может соединять вершину с ней же самой.

Множество вершин графа G традиционно обозначается $V(G)$, а множество ребер – $E(G)$. Степень вершины v, то есть количество выходящих из нее ребер, обозначается $d(v)$.

Определение 1.1. (не очень формальное) Путем в графе называется последовательность ребер, в которой конец одного ребра является началом следующего. Граф называется связным, если между любыми двумя его вершинами существует путь.

Связные графы изучаются практически так же давно, как и графы вообще. Но в XX-м веке появилась необходимость изучать также и то, «насколько сильно» связен граф. Одним из способов определить эту «силу связности» стала k-связность.

Определение 1.2. *Вершинной связностью* графа G (обозначаемой $\kappa(G)$) называется мощность наименьшего подмножества множества вершин графа G такого, что при его удалении G становится несвязным или тривиальным (то есть состоящим из одной вершины). При этом граф G называется k-связным, если $\kappa(G) \geq k$.

Например, если вы рассмотрите следующий граф (рис. 1), то легко заметите, что при удалении любой вершины он остается связным.

Таким образом, этот граф, как минимум, 1-связный. Кроме того, вы можете удалить две вершины этого графа (и, надеюсь, сейчас сами придумаете, какие именно две вершины, не подглядывая в подсказку на следующем рисунке) и получить несвязный граф.

А именно, удалив выделенные вершины (рис. 2), вы получите следующий несвязный граф (рис. 3).

Обратите внимание, что выбрать вершины, которые будут удалены, можно от-

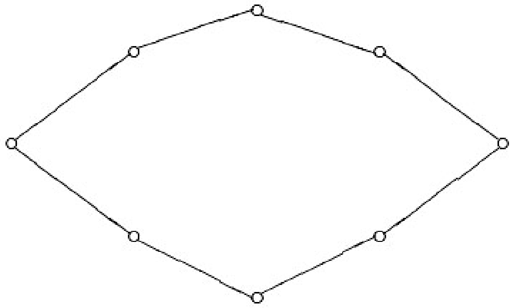

Рис. 1

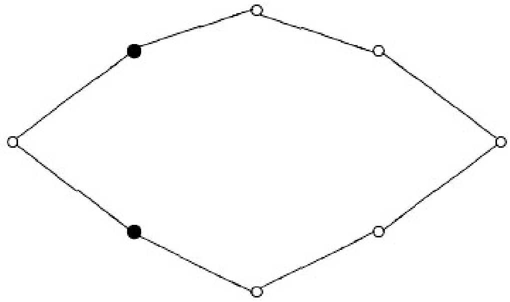

Рис. 2

нюдь не одним способом – подойдет любая пара вершин, не соединенных ребром.

Теперь мы убедились, что рассматриваемый граф и 1-связный, и 2-связный, но никак не большей связности, то есть $\kappa(G) = 2$.

К сожалению, у понятия k-связность есть один существенный недостаток – оно очень локальное. Например, если рассмотреть следующий граф, то видно, что он тоже 2-связный, как и граф из предыдущего примера (вершины, которые надо удалить для потери связности, на рисунке выделены черным (рис. 4)).

Но если посмотреть на этот граф, то создается впечатление, что к графу «большой связности» мы дорисовали кусок «маленькой связности», и получилось, что уменьшилась связность всего графа. То есть получается, что связность влияет на структуру только небольшого подграфа. Как же бороться с этим обстоятельством? Существуют два пути: первый из них – предположить, что мы не можем удалить ни одного ребра графа, не уменьшив его связность, а второй – предположить, что мы не можем стянуть ни одного ребра графа без уменьшения связности. (Стянуть ребро – значит, объединить две соединяемые им вершины в одну. Надеюсь, значение термина «удалить ребро» понятно уважаемым читателям и без объяснений.) Если же говорить чуть более формально, то мы получим следующие определения.

Определения 1.3. Ребро называется *существенным*, если при его удалении связность графа уменьшается.

Определение 1.4. Граф называется *минимальным*, если все его ребра существенны.

Определение 1.5. Пусть граф G – k-связный. Ребро называется *k-стягиваемым*, если при его стягивании граф сохраняет k-связность, иначе ребро называется *нестягиваемым*.

Определение 1.6. Граф называется *минимальным относительно стягивания ребер*, если все его ребра нестягиваемы.

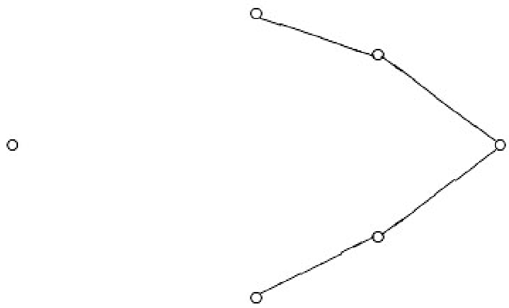

Рис. 3

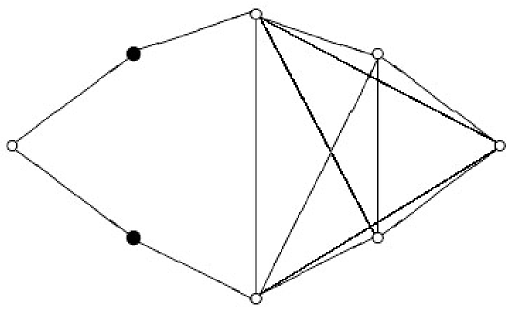

Рис. 4

Посмотрев на самый первый пример, внимательный читатель может легко убедиться, что все ребра в этом примере существенны, но 2-стягиваемы. С другой стороны, на следующем примере, ребро, соединяющее выделенные черным вершины – несущественно, но нестягиваемо. Таким образом, ни одно из этих свойств не является следствием другого (рис. 5).

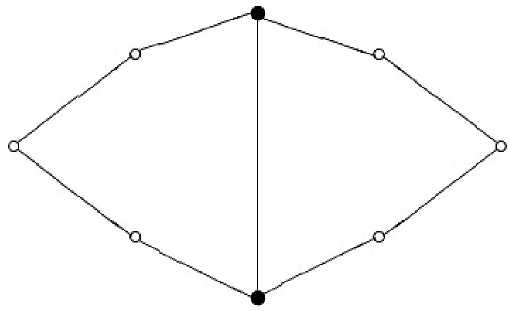

Рис. 5

ОБЗОР РЕЗУЛЬТАТОВ

Настоящий интерес к минимальным и минимальным по стягиванию графам возник после работы В. Татта [3], в которой было дано полное описание структуры 3-связного графа в терминах удаления и стягивания ребер. Вопрос о том, какова структура минимального и минимального по стягиванию k-связного для k больших 3, был рассмотрен в статье Р. Халина [1], но, к сожалению, описанные в этой статье результаты довольно просты. В этой же статье был задан вопрос о том, какова константа c, такая что количество вершин степени k в минимальном и минимальном по стягиванию k-связном графе равно по крайней мере $c|V|$. В дальнейшем исследовались в основном k-связные графы, обладающие только одним из двух свойств – минимальностью или минимальностью по стягиванию. Наибольшее продвижение в первом из этих направлений было получено В. Мадером в статье [6].

Теорема 2.1. *Пусть G – минимальный k-связный граф. Тогда количество вершин степени k в G не менее* $\frac{k-1}{2k-1}|V(G)|$.

Общих результатов во втором направлении получено не было, но существуют продвижения в изучении 4, 5, 6 и 7-связных графов. Случай 4-связных графов полностью описан в работах М. Фонте [4] и Н. Мартинова [5], для 4-связных графов также получено, что из минимальности по стягиванию следует минимальность и доказано, что $c = 1$. Для графов более высокой связности существуют примеры минимальных по стягиванию, но не минимальных графов, и, таким образом, рассмотрение графов, обладающих обоими свойствами, становится содержательным. Структура минимальных по стягиванию 5-связных графов наиболее подробно изучена в серии статей K. Андо и др., завершающейся статьей [7].

Теорема 2.2. *Пусть G – минимальный 5-связный граф. Тогда количество вершин степени 5 в G не менее* $\frac{1}{2}|V(G)|$.

Относительно структуры минимальных и минимальных по стягиванию 5 и 6-связных графов были получены следующие результаты.

Теорема 2.3. *Пусть G – 5-связный, минимальный и минимальный относительно стягивания, граф. Тогда количество вершин степени 5 в G не менее* $\frac{4}{7}|V(G)|$.

Теорема 2.4. *Пусть G – 6-связный, минимальный и минимальный относительно стягивания, граф. Тогда количество вершин степени 6 в G не менее* $\frac{1}{2}|V(G)|$.

Литература

1. *R. Halin*. A theorem on n-connected graphs J. Comb. Theory 7 (1969), 150–154.

2. *C. Thomassen*. Planarity and duality of finite and infinite graphs. J. Combin. Theory Ser. B 29 (1980), 244-271.

3. *W.T. Tutte*. A theory of 3-connected graphs. Indag. Math. 1961. Vol. 23. P. 441–455.

4. *M. Fontet.* Graphes 4-essentiels. C. R. Acad. Se. Paris, t. 287, serie A (1978), 289–290.

5. *N. Martinov*. A recursive characterization of the 4-connected graphs. Discrete Mathematics 84 (1990), 105–108.

6. *W. Mader*. Ecken Vom Gard n in minimalen *n*-fach zusammenhangenden Graphen. (German), Arch.Math. (Basel), 23 (1972), 219–224.

7. *K. Ando.* A Local structure theorem on 5-connected graphs. J. Graph Theory 60 (2009), 99–129.

8. Карпов Д.В., Пастор А.В. О структуре *k*-связного графа. Записки научных семинаров ПОМИ. Т. 266 (2000), 76–106.

Abstract

A brief analysis of *k*-connected graphs structure problem is given in the article.

Key words: *k*-connected graph.

Образцова Светлана Анатольевна,
ПОМИ РАН, СПб, аспирантка,
NTU, Singapore, PhD student.

svetlana.obraztsova@gmail.com