*Федотов Павел Валерьевич,*
*Царев Федор Николаевич,*
*Шалыто Анатолий Абрамович*

# ЗАДАЧА ПОИСКА УСЕРДНЫХ БОБРОВ И ЕЕ РЕШЕНИЯ

**Аннотация**

В работе приведено подробное описание задачи поиска усердных бобров, ее вариаций, методов решения и известные результаты.

**Ключевые слова:** усердный бобер, машина Тьюринга, автомат.

## ВВЕДЕНИЕ

Поиск *усердных бобров* (*busy beaver game*) – известная задача в теории вычислимости [1]. Под *усердным бобром* (*busy beaver*) в теории вычислимости понимают машину Тьюринга [2] с заданным числом состояний конечного автомата, которая будучи запущенной на пустой ленте, записывает на нее максимально возможное число ненулевых символов и останавливается.

Тема усердных бобров весьма слабо освещена в русскоязычной литературе. Цель настоящей работы – дать подробное описание задачи поиска усердных бобров, ее вариаций, методов решения, а также привести самих *усердных бобров* и результаты их работы.

## 1. ЗАДАЧА О ПОИСКЕ УСЕРДНЫХ БОБРОВ

С момента публикации в 1962 году статьи [3], в которой автор предлагает строить усердных бобров и сравнивать их между собой по указанному критерию, было сделано большое число попыток поиска усердных бобров, а также рассмотрен ряд вариаций этой задачи [4–6].

Приведем описание канонической задачи об усердных бобрах [3]. Для этого рассмотрим машину Тьюринга, содержащую автомат с $n$ состояниями, а также дополнительным конечным состоянием «Конец», работающую над двоичным алфавитом $\{0, 1\}$. Существует несколько типов машин Тьюринга. В этой задаче рассматривается машина, работающая на бесконечной в обе стороны ленте. На каждом шаге машина имеет два параметра:

– состояние автомата;

– символ ленты, находящийся под головкой.

На основании этих параметров **одновременно** определяются:

– состояние, в которое переходит автомат;

– символ, который будет записан в ячейке под головкой;

– направление движения головки (влево или вправо).

Машина останавливается, только если автомат достигает состояния «Конец».

**Табл. 1.** Известные значения функции усердного бобра

| ***n*** | **Σ(*n*)** | **Число шагов** |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 2 | 4 | 6 |
| 3 | 6 | 13 |
| 4 | 13 | 107 |

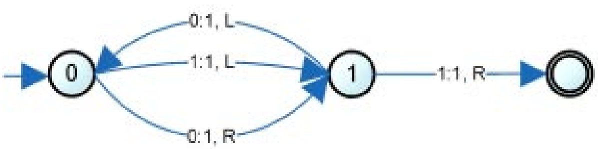



**Рис. 1.** Усердный бобер с двумя состояниями

Пусть задана машина Тьюринга. Запустим ее на пустой ленте – на ленте, в каждой ячейке которой записан ноль.

Задача об усердных бобрах, как указано выше, состоит в поиске машины Тьюринга, содержащей автомат с $n$ состояниями, которая, будучи запущенной на пустой ленте, останавливается и записывает на ленту наибольшее число единичных символов.

Функция усердного бобра $\sum(n)$ (*busy beaver function*) определяется как число единиц, написанных машиной-чемпионом с $n$ состояниями. Сама же машина-чемпион называется усердным бобром.

Т. Радо в работе [3] доказал, что функция $\sum(n)$ невычислима и растет быстрее любой вычислимой функции. Тем не менее, значения функции $\sum(n)$ могут быть найдены для небольших $n$. В настоящее время известны значения $\sum(n)$ для $n$, не превышающих четырех (табл. 1).

Для больших значений $n$ функцию усердного бобра сложно вычислить по нескольким причинам:

1) построить усердного бобра вручную крайне сложно [6];

2) пространство поиска очень велико – существует $(4n+4)^{2n}$ машин Тьюринга с $n$ состояниями [7];

3) отсутствие общего алгоритма для проверки того, останавливается ли машина Тьюринга [8];

4) огромное число шагов, которое может быть сделано машиной Тьюринга перед остановкой (найдена машина Тьюринга с автоматом из пяти состояний, делающая 47 176 870 шагов перед остановкой (пример 3), а также машина Тьюринга с автоматом из шести состояний, делающая более $2{,}5 \cdot 10^{2879}$ шагов [9]).

Приведем примеры перечисленных машин Тьюринга.

***Пример 1.*** **Усердный бобер с двумя состояниями** [3] (рис. 1)

Поясним используемые на рис. 1 обозначения. Крайняя левая стрелка указывает на начальное состояние автомата. Двойной окружностью обозначено состояние «Конец». Пометки на переходах имеют следующий формат: **«символ под головкой : символ, который будет написан, направление движения головки».** Направление движения обозначается: **L – «влево»; R – «вправо».**

При описании каждого состояния ленты **жирным символом** будем обозначать положение головки после завершения шага. Из таблицы следует, что усердный бобер с двумя состояниями, совершает **шесть шагов** и оставляет **четыре единицы** на ленте после завершения работы.

Описание поведения приведенной машины Тьюринга дано в табл. 2.

***Пример 2.*** **Усердный бобер с тремя состояниями** [3] (рис. 2)

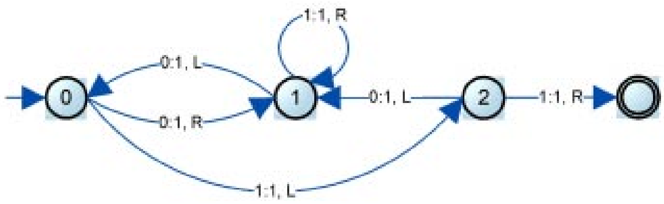



**Рис. 2.** Усердный бобер с тремя состояниями

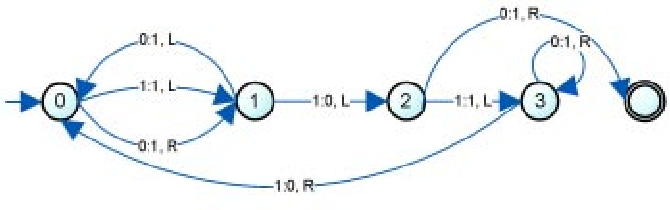



**Рис. 3.** Усердный бобер с четырьмя состояниями

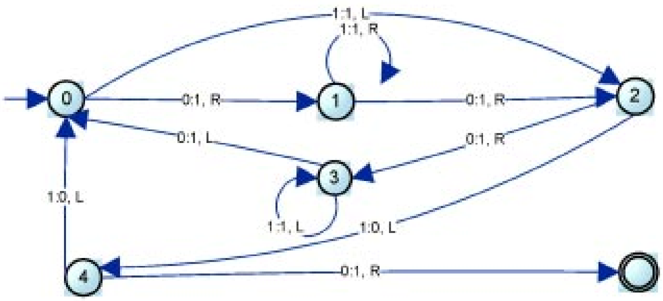



**Рис. 4.** Кандидат в усердные бобры с пятью состояниями

Усердный бобер с тремя состояниями оставляет на ленте **шесть единиц** после завершения работы. Описание поведения машины Тьюринга, приведенной на рис. 2 дано в табл. 3.

**Табл. 3.** Поведение усердного бобра с тремя состояниями

| Шаг | Состояние | Лента |
|---|---|---|
| Начало | 0 | `000000`**`0`**`000000` |
| 1 | 1 | `0000001`**`0`**`00000` |
| 2 | 0 | `000000`**`1`**`100000` |
| 3 | 2 | `00000`**`0`**`1100000` |
| 4 | 1 | `0000`**`0`**`11100000` |
| 5 | 0 | `000`**`0`**`111100000` |
| 6 | 1 | `0001`**`1`**`11100000` |
| 7 | 1 | `00011`**`1`**`1100000` |
| 8 | 1 | `000111`**`1`**`100000` |
| 9 | 1 | `0001111`**`1`**`00000` |
| 10 | 1 | `00011111`**`0`**`0000` |
| 11 | 0 | `0001111`**`1`**`10000` |
| 12 | 2 | `000111`**`1`**`110000` |
| 13 | Конец | `0001111`**`1`**`10000` |

***Пример 3.*** **Усердный бобер с четырьмя состояниями** [6, 10] (рис. 3)

Протокол работы усердного бобра с четырьмя состояниями, представленного на рис. 3, приведен в табл. 4.

***Пример 4.*** **Кандидат в усердные бобры с пятью состояниями** (рис. 4)

Пример описан в работе [9]. Этот кандидат делает 47 176 870 шагов, записывая 4098 единиц на ленту.

## 2. ВАРИАЦИИ ЗАДАЧИ О ПОИСКЕ УСЕРДНЫХ БОБРАХ

### 1. Классификация `quintuple`, `quadruple`

В рассмотренной выше задаче выполняется формализация машины Тьюринга, называемая **`quintuple`**. Наряду с такими машинами Тьюринга, в теории вычислимости рассматриваются также **`quadruple`**-машины и соответствующие им усердные бобры [9, 11]. **`Quadruple`**-машина Тьюринга отличается от рассмотренных тем, что при переходе из одного состояния в другое может совершить только одно действие – записать символ на ленту или переместить головку, но не оба сразу. Возможные действия на переходах **`quintuple`**-машин и **`quadruple`**-машин поясняются рис. 5.

**Табл. 2.** Поведение усердного бобра с двумя состояниями

| Шаг | Состояние | Лента |
|---|---|---|
| Начало | 0 | `0000`**`0`**`000` |
| 1 | 1 | `00001`**`0`**`00` |
| 2 | 0 | `0000`**`1`**`100` |
| 3 | 1 | `000`**`0`**`1100` |
| 4 | 0 | `00`**`0`**`11100` |
| 5 | 1 | `001`**`1`**`1100` |
| 6 | Конец | `0011`**`1`**`100` |

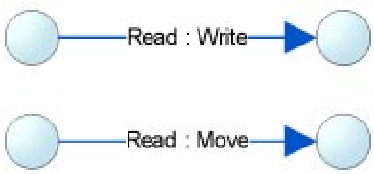
### 2. Классификация по наличию конечного состояния

Другая модификация машин Тьюринга получится, если рассматривать такие машины, которые не содержат отдельного состояния «Конец». В этом случае предполагается, что машина завершает свою работу, когда приходит в состояние, из которого нет перехода по символу, находящемуся под головкой [12]. Такая модификация машины Тьюринга называется машиной Тьюринга без конечного состояния (**`implicit halt`**). Если же специальное состояние «Конец» существует, то такой тип машины Тьюринга называется машиной с конечным состоянием (**`explicit halt`**).

### 3. Классификация по конечной конфигурации

В работе [11] рассматриваются усердные бобры среди машин Тьюринга, останавливающихся в стандартной конфигурации. Конфигурация называется стандартной, если машина Тьюринга в конце концов останавливается, считывая при этом самый левый символ в единственном сплошном


Возможные переходы **`quintuple`**-машины




Возможные переходы **`quadruple`**-машины

**Рис. 5.** Возможные переходы **`quintuple`**- и **`quadruple`**-машин

**Табл 4.** Поведение усердного бобра с четырьмя состояниями

| Шаг | Состояние | Лента |
|---|---|---|
| Начало | 0 | 0000000000**0**0000000000 |
| 1 | 1 | 00000000001**0**000000000 |
| 2 | 0 | 0000000000**1**1000000000 |
| 3 | 1 | 000000000**0**11000000000 |
| 4 | 0 | 00000000**0**111000000000 |
| 5 | 1 | 000000001**1**11000000000 |
| 6 | 2 | 00000000**1**011000000000 |
| 7 | 3 | 0000000**0**1011000000000 |
| 8 | 3 | 00000001**1**011000000000 |
| 9 | 0 | 000000010**0**11000000000 |
| 10 | 1 | 0000000101**1**1000000000 |
| 11 | 2 | 000000010**1**01000000000 |
| 12 | 3 | 00000001**0**101000000000 |
| 13 | 3 | 000000011**1**01000000000 |
| 14 | 0 | 0000000110**0**1000000000 |
| 15 | 1 | 00000001101**1**000000000 |
| 16 | 2 | 0000000110**1**0000000000 |
| 17 | 3 | 000000011**0**10000000000 |
| 18 | 3 | 0000000111**1**0000000000 |
| 19 | 0 | 00000001110**0**000000000 |
| 20 | 1 | 000000011101**0**00000000 |
| 21 | 0 | 00000001110**1**100000000 |
| 22 | 1 | 0000000111**0**1100000000 |
| 23 | 0 | 000000011**1**11100000000 |
| 24 | 1 | 00000001**1**111100000000 |
| 25 | 2 | 0000000**1**0111100000000 |
| 26 | 3 | 000000**0**10111100000000 |
| 27 | 3 | 0000001**1**0111100000000 |
| 28 | 0 | 00000010**0**111100000000 |
| 29 | 1 | 000000101**1**11100000000 |
| 30 | 2 | 00000010**1**011100000000 |
| 31 | 3 | 0000001**0**1011100000000 |
| 32 | 3 | 00000011**1**011100000000 |
| 33 | 0 | 000000110**0**11100000000 |
| 34 | 1 | 0000001101**1**1100000000 |
| 35 | 2 | 000000110**1**01100000000 |
| 36 | 3 | 00000011**0**101100000000 |
| 37 | 3 | 000000111**1**01100000000 |
| 38 | 0 | 0000001110**0**1100000000 |
| 39 | 1 | 00000011101**1**100000000 |
| 40 | 2 | 0000001110**1**0100000000 |
| 41 | 3 | 000000111**0**10100000000 |
| 42 | 3 | 0000001111**1**0100000000 |
| 43 | 0 | 00000011110**0**100000000 |
| 44 | 1 | 000000111101**1**00000000 |
| 45 | 2 | 00000011110**1**000000000 |
| 46 | 3 | 0000001111**0**1000000000 |
| 47 | 3 | 00000011111**1**000000000 |
| 48 | 0 | 000000111110**0**00000000 |
| 49 | 1 | 0000001111101**0**0000000 |
| 50 | 0 | 000000111110**1**10000000 |
| 51 | 1 | 00000011111**0**110000000 |

| Шаг | Состояние | Лента |
|---|---|---|
| 52 | 0 | 0000001111**1**11110000000 |
| 53 | 1 | 000000111**1**111110000000 |
| 54 | 2 | 00000011**1**0111110000000 |
| 55 | 3 | 0000001**1**10111110000000 |
| 56 | 0 | 00000010**1**0111110000000 |
| 57 | 1 | 0000001**0**10111110000000 |
| 58 | 0 | 000000**1**110111110000000 |
| 59 | 1 | 00000**0**1110111110000000 |
| 60 | 0 | 0000**0**11110111110000000 |
| 61 | 1 | 00001**1**1110111110000000 |
| 62 | 2 | 0000**1**01110111110000000 |
| 63 | 3 | 000**0**101110111110000000 |
| 64 | 3 | 0001**1**01110111110000000 |
| 65 | 0 | 00010**0**1110111110000000 |
| 66 | 1 | 000101**1**110111110000000 |
| 67 | 2 | 00010**1**0110111110000000 |
| 68 | 3 | 0001**0**10110111110000000 |
| 69 | 3 | 00011**1**0110111110000000 |
| 70 | 0 | 000110**0**110111110000000 |
| 71 | 1 | 0001101**1**10111110000000 |
| 72 | 2 | 000110**1**010111110000000 |
| 73 | 3 | 00011**0**1010111110000000 |
| 74 | 3 | 000111**1**010111110000000 |
| 75 | 0 | 0001110**0**10111110000000 |
| 76 | 1 | 00011101**1**0111110000000 |
| 77 | 2 | 0001110**1**00111110000000 |
| 78 | 3 | 000111**0**100111110000000 |
| 79 | 3 | 0001111**1**00111110000000 |
| 80 | 0 | 00011110**0**0111110000000 |
| 81 | 1 | 000111101**0**111110000000 |
| 82 | 0 | 00011110**1**1111110000000 |
| 83 | 1 | 0001111**0**11111110000000 |
| 84 | 0 | 000111**1**111111110000000 |
| 85 | 1 | 00011**1**1111111110000000 |
| 86 | 2 | 0001**1**01111111110000000 |
| 87 | 3 | 000**1**101111111110000000 |
| 88 | 0 | 0000**1**01111111110000000 |
| 89 | 1 | 000**0**101111111110000000 |
| 90 | 0 | 00**0**1101111111110000000 |
| 91 | 1 | 001**1**101111111110000000 |
| 92 | 2 | 00**1**0101111111110000000 |
| 93 | 3 | 0**0**10101111111110000000 |
| 94 | 3 | 01**1**0101111111110000000 |
| 95 | 0 | 010**0**101111111110000000 |
| 96 | 1 | 0101**1**01111111110000000 |
| 97 | 2 | 010**1**001111111110000000 |
| 98 | 3 | 01**0**1001111111110000000 |
| 99 | 3 | 011**1**001111111110000000 |
| 100 | 0 | 0110**0**01111111110000000 |
| 101 | 1 | 01101**0**1111111110000000 |
| 102 | 0 | 0110**1**11111111110000000 |
| 103 | 1 | 011**0**111111111110000000 |
| 104 | 0 | 01**1**1111111111110000000 |
| 105 | 1 | 0**1**11111111111110000000 |
| 106 | 2 | **0**011111111111110000000 |
| 107 | Конец | 1**0**11111111111110000000 |

блоке единиц на ленте с пустыми символами во всех остальных клетках [4, 11]. Пример конфигурации ленты машины Тьюринга, находящейся в стандартной конфигурации, приведен на рис. 6.

Три описанные классификации являются независимыми. Поэтому существует восемь вариаций задач об усердных бобрах (рис. 7).

Часто вместе с поиском усердных бобров рассматривают схожую задачу, заключающуюся в поиске машины Тьюринга, которая, будучи запущенной на пустой ленте, делает максимальное число шагов перед остановом среди всех останавливающихся машин Тьюринга с заданным числом состояний [3, 4]. Число сделанных шагов такой машиной Тьюринга с $n$ состояниями обозначается $S(n)$. Функция $S(n)$ также является невычислимой [3].

## 3. ИЗВЕСТНЫЕ МЕТОДЫ ПОИСКА УСЕРДНЫХ БОБРОВ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Задача о поиске усердных бобров и ее вариации широко исследовались. В табл. 5, 6 приведены известные результаты для максимального числа единиц (табл. 5) и максимального числа шагов (табл. 6) для разных типов машин Тьюринга с числом состояний от одного до шести.

Жирным шрифтом в табл. 5, 6 отмечены результаты, для ко-

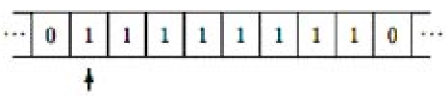



**Рис. 6.** Стандартная конфигурация

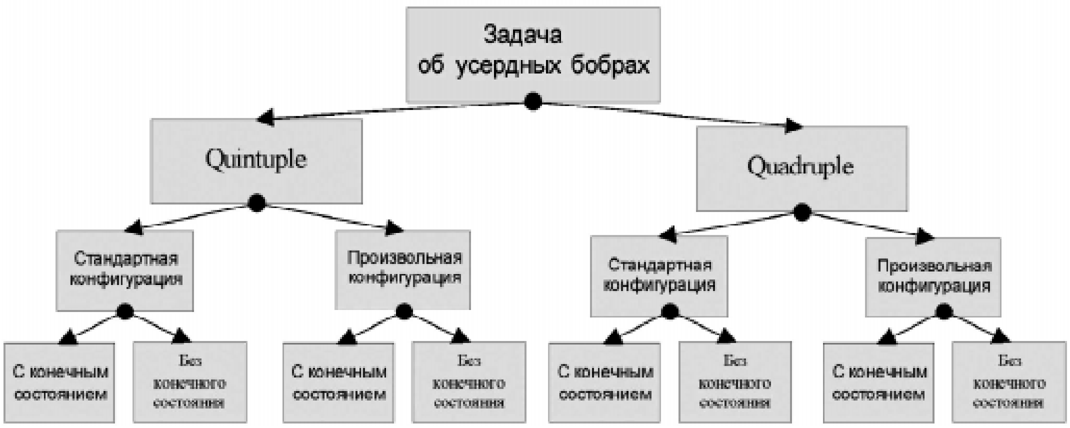



**Рис. 7.** Вариации задачи об усердных бобрах

**Табл. 5.** Известные результаты для максимального числа единиц

| *n* | Максимальное число единиц | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Quadruple** | | | | **Quintuple** | | | |
| | Произвольная конфигурация | | Стандартная конфигурация | | Произвольная конфигурация | | Стандартная конфигурация | |
| | С конечным состоянием | Без конечного состояния | С конечным состоянием | Без конечного состояния | С конечным состоянием | Без конечного состояния | С конечным состоянием | Без конечного состояния |
| 1 | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | | | |
| 2 | **2** | **2** | **2** | **2** | **4** | | | |
| 3 | **4** | **3** | **4** | **3** | **6** | | | |
| 4 | **8** | **8** | **7** | **5** | **13** | Не исследовалось | | |
| 5 | 16 | 15 | 16 | 11 | 4098 | | | |
| 6 | 240 | 239 | 163 | 25 | $> 4{,}640 \times 10^{1439}$ | | | |

**Табл. 6.** Известные результаты для максимального числа шагов

| *n* | Максимальное число шагов | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Quadruple** | | | | **Quintuple** | | | |
| | Произвольная конфигурация | | Стандартная конфигурация | | Произвольная конфигурация | | Стандартная конфигурация | |
| | С конечным состоянием | Без конечного состояния | С конечным состоянием | Без конечного состояния | С конечным состоянием | Без конечного состояния | С конечным состоянием | Без конечного состояния |
| 1 | **2** | **1** | **2** | **1** | **1** | | | |
| 2 | **4** | **3** | **4** | **3** | **6** | | | |
| 3 | **14** | **13** | **14** | **13** | **21** | | | |
| 4 | **38** | **37** | **32** | **31** | **107** | Не исследовалось | | |
| 5 | 112 | 111 | 112 | 57 | 47176870 | | | |
| 6 | 41607 | 41606 | 27174 | 255 | $> 2{,}584 \times 10^{2879}$ | | | |

торых доказана невозможность их улучшения. Для результатов, перед которыми стоит символ «>» точное значение приведено быть не может из-за огромной величины соответствующих чисел.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В работе приведено подробное описание задачи об усердных бобрах, ее вариациях и известные результаты ее решения. Изложенное может быть полезно студентам и школьникам при освоении теории вычислимости.

## Литература

1. Ехали тьюрмиты и тримувьи на... машине Тьюринга // Компьютерные инструменты в образовании. 2005. № 3.
2. *Хопкрофт Д., Мотвани Р., Ульман Д.* Введение в теорию автоматов, языков и вычислений. М.: Вильямс, 2002.
3. *Rado T.* On Non-Computable Functions //The Bell System Technical Journal. 1962. Vol. 41. № 3, pp. 877–884.
4. *Ross K., Kellett O., Heuveln B., Bringsjord S.* A New-Millenium Attack on the Busy Beaver Problem. 2006 // http://www.cs.rpi.edu/~kelleo/busybeaver/downloads/superpaper.pdf
5. Конкурс КИО-2007 // http://ipo.spb.ru/kio2007
6. *Посов И.А.* Занятой бобер // Компьютерные инструменты в образовании. 2007. № 2.
7. Shallit J. Handout on The Busy Beaver Problem. University of Waterloo. 1988 // http://grail.cba.csuohio.edu/~somos/beaver.ps
8. *Turing A.* On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem //Proceedings of the London Mathematical Society. 1937. Ser. 2. Vol. 42, pp. 230–265.
9. *Marxen H., Buntrock J.* Attacking the Busy Beaver 5 // Bulletin of the EATCS, February 1990, № 40, pp. 247–251 // http://www.drb.insel.de/~heiner/BB/bb-mabu90.ps
10. *Brady A.H.* The determination of the value of Rado's noncomputable function Sigma(k) for four-state Turing machines // Mathematics of Computation. April 1983. Vol. 40. № 162, pp. 647–665.
11. *Булос Дж., Джеффри Р.* Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994.
12. *Kellett O.* A Multi-Faceted Attack on the Busy Beaver Problem. Rensselaer Polytechnic Institute. 2005 // http://www.cs.rpi.edu/~kelleo/busybeaver/downloads/OwenThesis.pdf

**Abstract**

The paper gives a detailed description of the busy beaver problem, its variations, methods for solving and well-known results on the busy beaver problem.



***Федотов Павел Валерьевич,***
***студент кафедры «Компьютерные технологии» СПбГУ ИТМО,***
***fedotov@rain.ifmo.ru***

***Царев Федор Николаевич,***
***магистрант кафедры «Компьютерные технологии» СПбГУ ИТМО,***
***fedor.tsarev@gmail.com***

***Шалыто Анатолий Абрамович,***
***доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой «Технологии программирования» СПбГУ ИТМО,***
***shalyto@mail.ifmo.ru***