Сосновский Николай Николаевич

ПРОВЕДЕНИЕ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОГРАММНОГО СРЕДСТВА MICROSOFT OFFICE EXCEL

Аннотация

В статье рассматриваются примеры учебных материалов для проведения практических занятий по вычислительной математике. В течение двух лет с помощью подобных материалов автор проводил практические занятия по методам вычислений и теории вероятностей и математической статистике со студентами вечерней формы обучения.

Так случилось, что автору данной статьи довелось изрядно поработать с программой Microsoft Office Excel. Будучи математиком, он в достаточной мере оценил достоинства этого средства для решения математических задач, с которыми сталкивается студент в период обучения.

Написание формул, особенно если присваивать имена отдельным ячейкам или рангам ячеек, происходит в обычной математической нотации, а применение механизма выделения и перетаскивания ячеек с автоматическим копированием или заполнением конечных ячеек данными или формулами предельно упрощает составление вычислительных таблиц для решения самых разных математических задач. Стоит упомянуть также возможности составления таблиц подстановки с одним или двумя входами, что позволяет легко получить решение задачи для различных значений исходных данных и с помощью построителя диаграмм и графиков получить графическое изображение результатов задачи. Последнее важно, например, при решении задач по теории вероятностей и математической статистике, так как позволяет оценить, при каких исходных данных рассматриваемое событие является вполне возможным или даже практически достоверным, а при каких – практически невозможным. Таким образом, появляется возможность анализа задачи, зависимости результата от исходных данных и параметров. Сказанное справедливо в полной мере и для задач вычислительной математики, где из-за громоздких формул или трудоемких вычислений трудно порой в полной мере оценить и почувствовать достоинства того или иного метода. Автор в течение двух лет использовал указанные соображения при составлении учебных материалов и проведении на их основе практических занятий по методам вычислений, теории вероятностей и математической статистике со студентами вечерней формы обучения. Результат представляется положительным: уставшие после работы и не имеющие хорошей математической подготовки «вечерние» студенты с интересом составляют таблицы для решения задач с помощью учебных материалов и при живом участии преподавателя. Работа по составлению вычислительных таблиц в Excel напоминает сборку изделия в детском конструкторе, и иногда студенты так увлекаются, что приходится в 22 часа их силой выпроваживать домой. Общие пояснения по сущности задачи и математическим формулам преподаватель дает с использованием переносной доски, на которой можно разместить и закрепить лист бумаги формата А3 (лучше чертежной, недорогой) и писать черным фломастером. Трудности по работе с Excel снимаются при непосредственном объяснении на компьютере как выполнить ту или иную функцию.

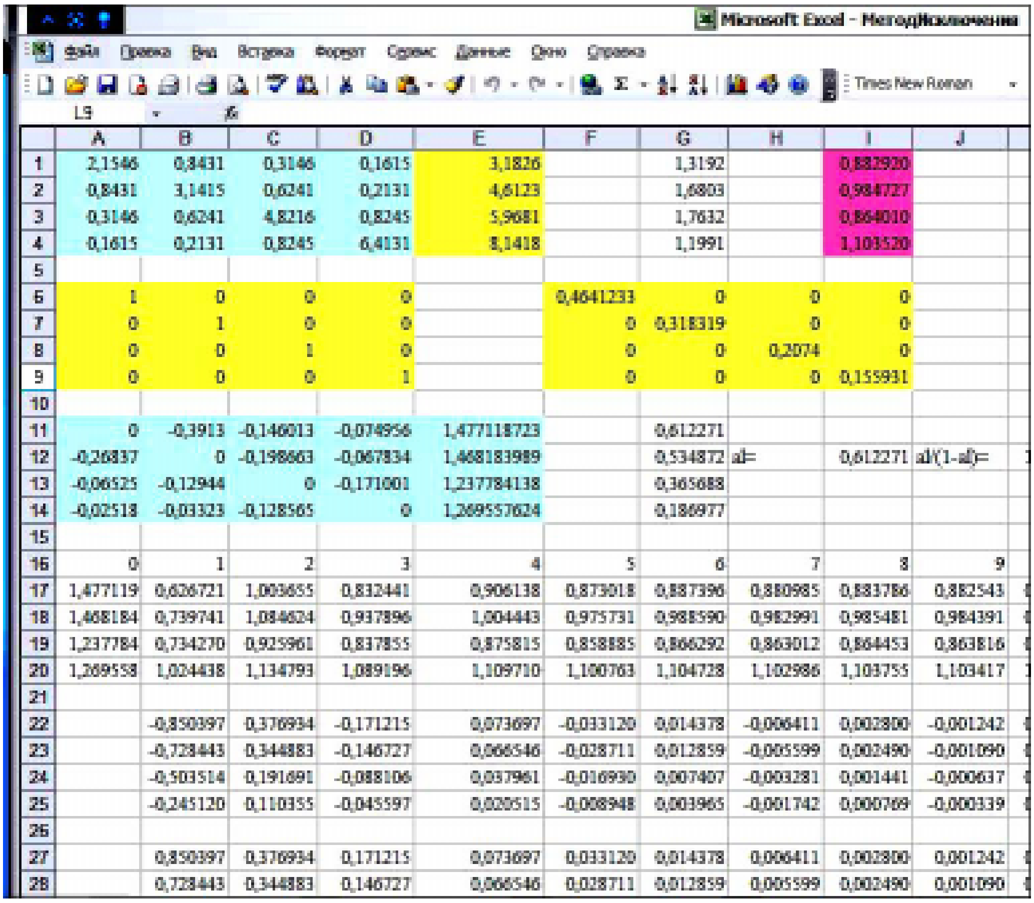
Далее в данной статье приводятся учебные пособия для решения некоторых задач по вычислительной математике.

МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Скопируем с листа Итерация пособия МетодИсключения.xls на чистый лист книги xls расширенную матрицу $A\_$, состоящую из матрицы A и присоединенного к ней справа столбца b, (рис. 1). Результат копирования размещен в диапазоне ячеек A1:E4. Элементы главной диагонали матрицы системы значительно преобладают над остальными элементами: в столбце G строк 1–4 подсчитаны суммы модулей недиагональных элементов матрицы по строкам – они существенно меньше диагональных элементов соответствующих строк. Так что итерацию можно записать в виде

$$\boxed{x^{k+1} = (E - DA)x^k + Db},$$

где D – диагональная матрица, диагональные элементы которой равны обратным



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	2,1546	0,8431	0,3146	0,1615	3,1826		1,3192		0,882920	
2	0,8431	3,1415	0,6241	0,2131	4,6123		1,6803		0,984727	
3	0,3146	0,6241	4,8216	0,8245	5,9681		1,7632		0,864010	
4	0,1615	0,2131	0,8245	6,4131	8,1418		1,1991		1,103520	
5										
6	1	0	0	0		0,4641233	0	0	0	
7	0	1	0	0		0	0,318319	0	0	
8	0	0	1	0		0	0	0,2074	0	
9	0	0	0	1		0	0	0	0,155931	
10										
11	0	-0,3913	-0,146013	-0,074956	1,477118723		0,612271			
12	-0,26837	0	-0,198663	-0,067834	1,468183989		0,534872	al=	0,612271	al/(1-al)=
13	-0,06525	-0,12944	0	-0,171001	1,237784138		0,365688			
14	-0,02518	-0,03323	-0,128565	0	1,269557624		0,186977			
15										
16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
17	1,477119	0,626721	1,003655	0,832441	0,906138	0,873018	0,887396	0,880985	0,883786	0,882543
18	1,468184	0,739741	1,084624	0,937896	1,004443	0,975731	0,988590	0,982991	0,985481	0,984391
19	1,237784	0,734270	0,925961	0,837855	0,875815	0,858885	0,866292	0,863012	0,864453	0,863816
20	1,269558	1,024438	1,134793	1,089196	1,109710	1,100763	1,104728	1,102986	1,103755	1,103417
21										
22		-0,850397	0,376934	-0,171215	0,073697	-0,033120	0,014378	-0,006411	0,002800	-0,001242
23		-0,728443	0,344883	-0,146727	0,066546	-0,028711	0,012859	-0,005599	0,002490	-0,001090
24		-0,503514	0,191691	-0,088106	0,037961	-0,016930	0,007407	-0,003281	0,001441	-0,000637
25		-0,245120	0,110355	-0,045597	0,020515	-0,008948	0,003965	-0,001742	0,000769	-0,000339
26										
27		0,850397	0,376934	0,171215	0,073697	0,033120	0,014378	0,006411	0,002800	0,001242
28		0,728443	0,344883	0,146727	0,066546	0,028711	0,012859	0,005599	0,002490	0,001090

Рис. 1

значениям соответствующих элементов матрицы A, k – номер итерации.

Ниже строим единичную матрицу E и матрицу D.

Еще ниже строим матрицу $B = E - DA$ и столбец $f = Db$. Матрицу B и f получаем с помощью функции МУМНОЖ(массив1;массив2).

Правее строим столбец, элементы которого суть суммы модулей элементов строк матрицы A, и формулу для расчета коэффициента оценки погрешности:

$$\max_i \left| x_i - x_i^k \right| \le \frac{\alpha}{1-\alpha} \max_i \left| x_i^k - x_i^{k-1} \right|,$$

где $\alpha = \max_i \sum_{\substack{j=1 \\ j\ne i}}^{n} \left| a_{ij} / a_{ii} \right|$.

Ниже, в столбцах 0, 1, 2, и т. д. построены последовательные приближения по формуле:

$$x^k = Bx^{k-1} + f.$$

Видим, что уже на 12 шаге погрешность становится равной 0,000167 (рис. 1).

МЕТОД ОТРАЖЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим метод отражений для решения системы линейных уравнений

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (1).$$

Точное решение, очевидно, есть вектор $(0,0,1)'$, где штрих обозначает операцию транспонирования. Компактная схема Гаусса для этой системы неприменима, так как второй угловой минор равен 0. Следующее далее изложение есть комментарий к рис. 2.

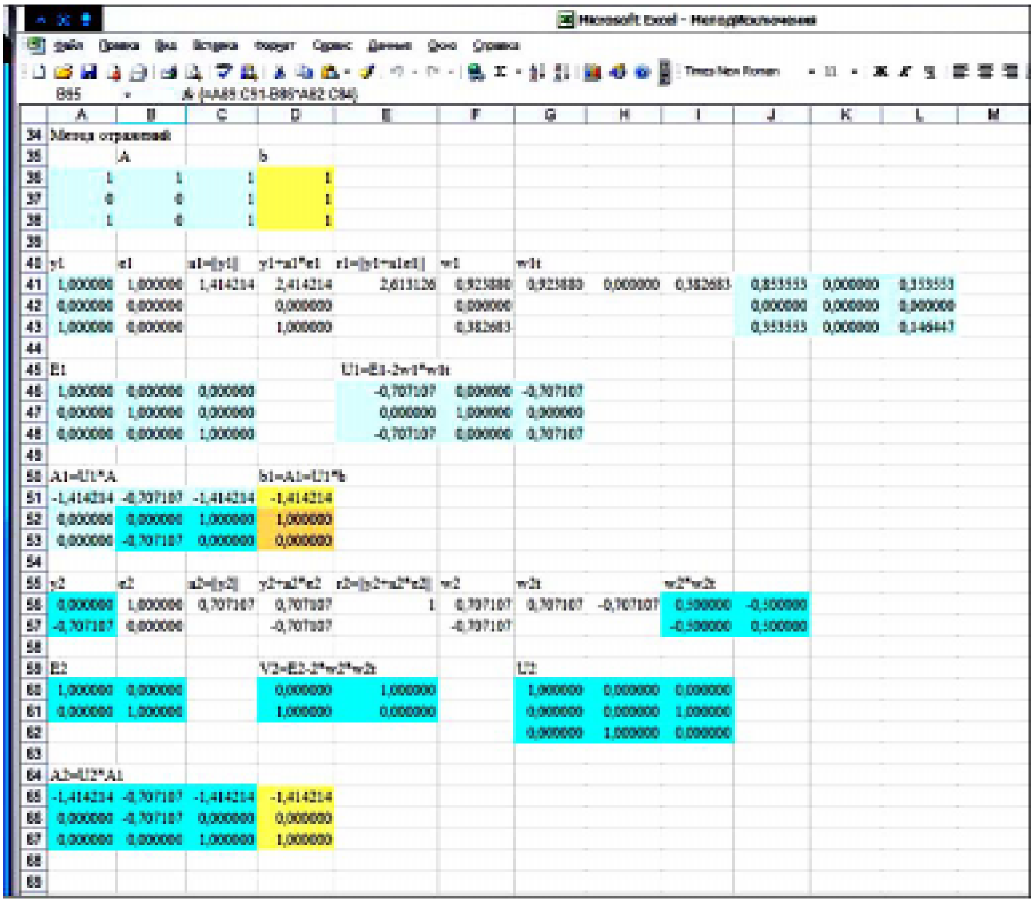


Рис. 2

В строках 40–48 по шагам показано построение матрицы отражений $U_1 = E_1 - 2 \cdot w_1 w_1'$, переводящей вектор $y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ в вектор $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Вычисляем $\alpha_1 = \|y_1\| = \sqrt{2}$, затем вектор $w_1 = \dfrac{1}{\rho_1} \cdot (y_1 + \alpha_1 e_1)$, где $\rho_1 = \|y_1 + \alpha_1 e_1\|$. Затем с помощью функции МУМНОЖ(массив1;массив2) вычисляем матрицу $w_1 w_1'$ (J41:L43).

Ниже, в строках 55–62, то же показано для векторов $y_2 = \begin{pmatrix} 0{,}0000000 \\ -0{,}707107 \end{pmatrix}$ и $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

В строках 64–67 получена окончательная система, обусловленность которой не хуже исходной (рис. 2).

Построенная электронная таблица позволяет изучать зависимость результирующей расширенной матрицы системы (A51:D53) от значений элементов исходной матрицы (A36:D38). При этом не накладывается никаких ограничений на матрицу $A\_$. В любом случае результирующая матрица будет приведена к правой диагональной матрице. Если при этом на диагонали окажутся нули, то это свидетельствует о вырожденности исходной системы: либо она несовместна, либо имеет бесконечно много решений. Если же результирующая система не вырождена, то ее решение легко находится для правой диагональной матрицы системы, обусловленность которой не хуже, чем матрица исходной системы.

МЕТОД ПРОСТОЙ ИТЕРАЦИИ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ СИСТЕМЫ

Ниже показан метод простой итерации для той же самой системы (1) (рис. 3)

Матрица этой системы представляется неподходящей для применения данного ме-

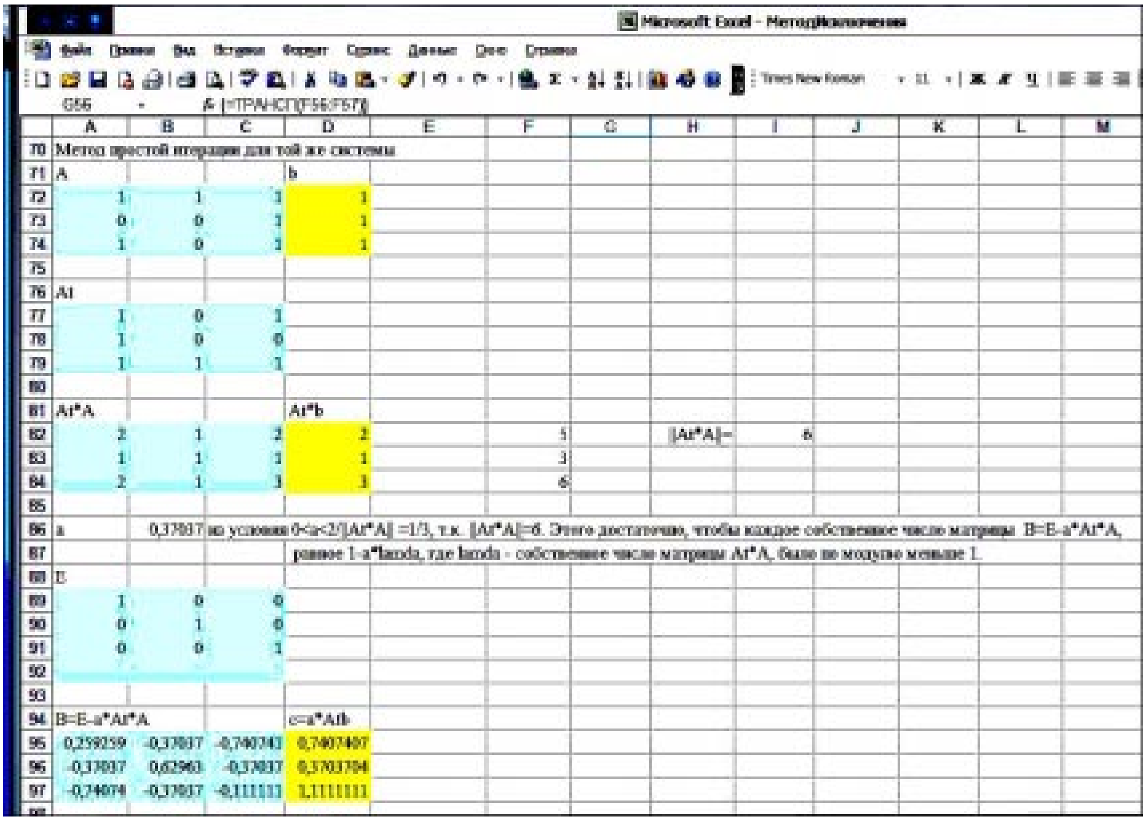


Рис. 3

тода, так как диагональные элементы явно не доминируют над остальными элементами матрицы. Поэтому итерационное соотношение будем искать в виде

$$x^{k+1} = (E - \alpha A'A)x^k + \alpha A'b\,, \qquad (2)$$

где α – число, A' – матрица, транспонированная к матрице A.

С помощью функции ТРАНСП вычисляем матрицу A', затем с помощью функции МУМНОЖ – матрицу $A'A$:

$$A'A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

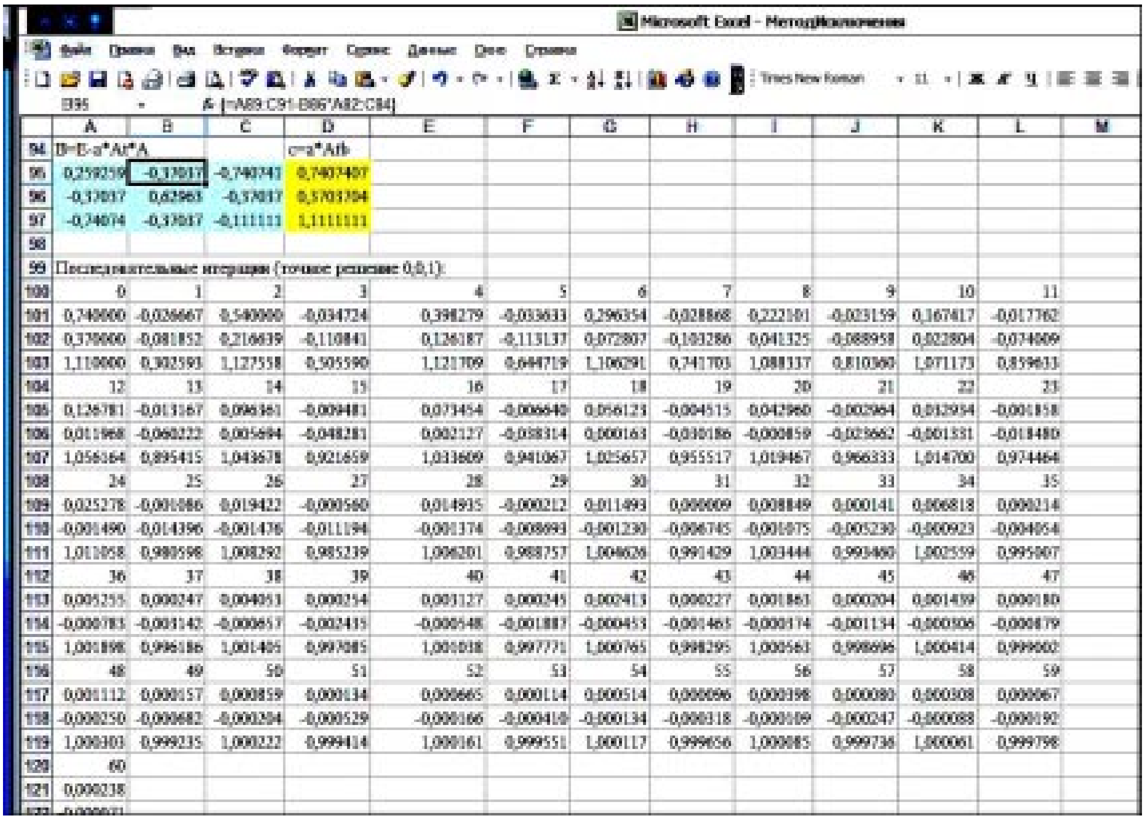
Эта матрица положительно определена: $(A'Ax, x) = (Ax, Ax) > 0,\ x \neq 0,\ |A| \neq 0$. Поэтому ее собственные числа λ_i – положительные действительные числа, удовлетворяющие неравенству: $0 < \lambda_i \le 6$. Здесь правая граница неравенства получена вычислением нормы $\|A'A\|_1 = 6$, где норма $\|A\|_1$ равна максимуму сумм модулей элементов матрицы A по строкам). Эта оценка несколько завышена, но может быть использована для определения достаточных условий сходимости итерационного процесса. Собственные числа матрицы $E - \alpha A'A$ получаются из собственных чисел матрицы $A'A$ по формуле: $\mu_i = 1 - \alpha\lambda_i$. Поэтому, если α удовлетворяет условию $0 < \alpha < 2/\|A'A\|_1 = 2/6 = 1/3$, то собственные числа итерирующей матрицы $E - \alpha A'A$ удовлетворяют условию:

$$1 - 1/3 \cdot 6 = -1 < \mu_i < 1 = 1 - 0\,.$$

Таким образом, если α удовлетворяет условию

$$0 < \alpha < 1/3\,, \qquad (3)$$

то итерационный процесс (2) будет сходящимся.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
94	B=E-a*At*A			c=a*At*b								
95	0,259259	-0,37037	-0,740741	0,7407407								
96	-0,37037	0,62963	-0,37037	0,5703704								
97	-0,74074	-0,37037	-0,111111	1,1111111								
98												
99	Последовательные итерации (точное решение 0,0,1):											
100	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
101	0,740000	-0,026667	0,540000	-0,034724	0,398279	-0,033633	0,296354	-0,028868	0,222101	-0,023159	0,167417	-0,017762
102	0,370000	-0,081852	0,216639	-0,110841	0,126187	-0,113137	0,072807	-0,103286	0,041325	-0,088958	0,022804	-0,074009
103	1,110000	0,302593	1,127558	0,505590	1,121709	0,644719	1,106291	0,741703	1,088337	0,810360	1,071173	0,859633
104	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
105	0,126781	-0,013167	0,096361	-0,009481	0,073454	-0,006640	0,056123	-0,004515	0,042960	-0,002964	0,032954	-0,001858
106	0,011968	-0,060222	0,005694	-0,048281	0,002127	-0,038314	0,000163	-0,030186	-0,000859	-0,023662	-0,001331	-0,018480
107	1,056164	0,895415	1,043678	0,921659	1,033609	0,941067	1,025657	0,955517	1,019467	0,966333	1,014700	0,974464
108	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
109	0,025278	-0,001086	0,019422	-0,000560	0,014935	-0,000212	0,011493	0,000009	0,008849	0,000141	0,006818	0,000214
110	-0,001490	-0,014396	-0,001476	-0,011194	-0,001374	-0,008693	-0,001230	-0,006745	-0,001075	-0,005230	-0,000923	-0,004054
111	1,011058	0,980598	1,008292	0,985239	1,006201	0,988757	1,004626	0,991429	1,003444	0,993460	1,002559	0,995007
112	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
113	0,005255	0,000247	0,004053	0,000254	0,003127	0,000245	0,002413	0,000227	0,001863	0,000204	0,001439	0,000180
114	-0,000783	-0,003142	-0,000657	-0,002435	-0,000548	-0,001887	-0,000453	-0,001463	-0,000374	-0,001134	-0,000306	-0,000879
115	1,001898	0,996186	1,001405	0,997085	1,001038	0,997771	1,000765	0,998295	1,000563	0,998696	1,000414	0,999002
116	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
117	0,001112	0,000157	0,000859	0,000134	0,000665	0,000114	0,000514	0,000096	0,000398	0,000080	0,000308	0,000067
118	-0,000250	-0,000682	-0,000204	-0,000529	-0,000166	-0,000410	-0,000134	-0,000318	-0,000109	-0,000247	-0,000088	-0,000192
119	1,000303	0,999235	1,000222	0,999414	1,000161	0,999551	1,000117	0,999656	1,000085	0,999736	1,000061	0,999798
120	60											
121	0,000238											

Рис. 4

Используя правила построения формул для работы с массивами, построим матрицу $B = E - \alpha A'A$ и вектор свободных членов $\alpha A'b$ (рис. 3, строки 94–97). Ниже строим формулы для последовательных приближений. Формулы для 1-го приближения строим, используя абсолютные ссылки на матрицу B и относительные ссылки на вектор x^0. Остальные приближения получаем «перетаскиванием» формул 1-го приближения. В качестве нулевого приближения x^0 выбираем столбец свободных членов преобразованной системы, элементы которого округляем до 2 десятичных знаков после запятой.

Изучаем скорость сходимости α для различных значений, удовлетворяющих условию (3).

Можно заметить, что сходимость возрастает при приближении к 1/3. Сходимость имеет место и при $\alpha = 1/2{,}7$, но при $\alpha = 1/2{,}5$ процесс расходится.

Построенная таблица позволяет изучать зависимость сходимости метода простой итерации от элементов исходной матрицы (A72:C74). При их изменении происходит автоматический пересчет всех вычислений. Для обеспечения сходимости нужно задавать в ячейке B86 значение $\alpha < 2/\|A'A\|_1$, где норма $\|A'A\|_1$ автоматически пересчитывается в ячейке I82.

Можно также изучать зависимость сходимости от вектора начального приближения x^0. Если $|A| \neq 0$, то процесс сходится при любом векторе x^0, меняется только число итераций.

Abstract

Examples of instructions for implementation of practical studies on calculus mathematics are considered in this article. During two years by means of such materials the author conducted practical studies on calculus mathematics and theory of probabilities and mathematical statistics with students of «evening» form of education.

Сосновский Николай Николаевич,
кандидат технических наук,
старший научный сотрудник,
доцент кафедры высшей математики ВМ-2
СПбГЭТУ «ЛЭТИ»,
Sosnovskiy-78@yandex.ru