Кондратьев Александр Сергеевич,
Ларченкова Людмила Анатольевна

МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ, ОБРАБОТКИ И АНАЛИЗА РЕЗУЛЬТАТОВ ФИЗИЧЕСКОГО ЭКСПЕРИМЕНТА С ПРИМЕНЕНИЕМ ИНСТУМЕНТАЛЬНЫХ ПАКЕТОВ

Оценка погрешности измерения неизвестного сопротивления методом амперметра и вольтметра

Оценка погрешностей измерения различных физических характеристик реальных систем представляет собой непременный компонент умений любого физика-экспериментатора, независимо от его конкретной специализации. Это умение необходимо и физику-теоретику для возможности компетентной оценки надежности используемых экспериментальных данных при сравнении результатов эксперимента с предсказаниями физической теории. Обучение основам таких оценок обычно производится на вводных занятиях в физических лабораториях вузов [1–3]. Немалый интерес к этому вопросу имеется и при обучении физике в средней школе, особенно в специализированных школах и классах физико-математического профиля. При этом обычно рассматривается теория так называемой «максимальной» (или «предельной») погрешности, которая открывает возможности для лучшего усвоения и применения основ математического анализа, перекидывая еще один «мостик» между курсами физики и математики. Однако некоторые появившиеся в последнее время статьи и учебные пособия содержат грубые ошибки, сводящие на нет положительные результаты изучения этого вопроса [4, 5].

Данная статья посвящена последовательному изложению вопроса о погрешности при определении величины неизвестного сопротивления методом амперметра и вольтметра, который, несмотря на свою кажущуюся простоту, позволяет продемонстрировать методологию и методику проведения, обработки и анализа результатов физического эксперимента с применением современных компьютерных программ, таких как Matlab, MatCad, Maple и др. Причем привлечение компьютера для получения четких результатов позволяет дать более точные рекомендации для организации физического эксперимента, обеспечивающего получение минимально возможной относительной погрешности измерения неизвестного сопротивления.

Сформулируем задачу следующим образом. *Как среди имеющихся наборов вольтметров и амперметров с заданными значениями сопротивлений R_v и R_a и ценами деления шкал ΔU_v и ΔI_a, определяющими погрешность измерения тока и напряжения, выбрать пару, и по какой схеме ее*

включить, чтобы погрешность измерения неизвестного сопротивления R_x была наименьшей?

В эксперименте обычно используется источник постоянного напряжения U и собирается одна из двух цепей, схемы которых показаны на рис. 1 и 2. Напряжение подается к свободным концам цепей.

Поскольку всегда $R_a << R_v$, то легко видеть, что схема на рис. 1 обеспечивает высокую точность измерений при $R_x >> R_a$, а схема на рис. 2 – при $R_x << R_v$. Только первая схема подходит для измерения больших сопротивлений $R_x \geq R_v$, и только вторая – для измерения малых сопротивлений $R_x \leq R_a$. При выполнении условия $R_a << R_x << R_v$ обе схемы дают примерно одинаковую погрешность измерений. Однако для более точной оценки, какая из схем предпочтительнее, таких качественных соображений уже недостаточно, и следует проводить более аккуратный анализ, основанный на последовательном учете того обстоятельства, что в первой схеме напряжение U_x на неизвестном сопротивлении R_x меньше напряжения U_v, показываемого вольтметром, а во второй схеме ток через R_x меньше значения I_a, показываемого амперметром.

С помощью закона Ома для однородного участка цепи для схемы на рис. 1 имеем:

$$R_x = \frac{U_v}{I_a} - R_a , \qquad (1)$$

так что для относительной ошибки $\varepsilon_1 = \dfrac{\Delta R_x}{R_x}$ получаем:

$$\varepsilon_1 = \frac{I_a \cdot \Delta U_v + U_v \cdot \Delta I_a}{I_a\left(U_v - I_a R_a\right)} , \qquad (1a)$$

где I_a и U_v – соответственно показания амперметра и вольтметра.

Нетрудно убедиться, что знаменатель в выражении (1а) всегда положителен.

Для схемы на рис. 2 получим:

$$R_x = \frac{U_v}{I_a - \dfrac{U_v}{R_v}} , \qquad (2)$$

так что для относительной ошибки $\varepsilon_1 = \dfrac{\Delta R_x}{R_x}$ в этом случае имеем:

$$\varepsilon_2 = \frac{I_a \cdot \Delta U_v + U_v \cdot \Delta I_a}{U_v\left(I_a R_v - U_v\right)} \cdot R_v , \qquad (2a)$$

Опять нетрудно убедиться, что знаменатель в правой части (2а) всегда положителен.

Если бы было возможно измерение физических величин без погрешностей, то было бы безразлично, по какой схеме включать приборы. Формулы (1) и (2) давали бы возможность одинаково успешно находить R_x с помощью любой схемы. Однако наличие погрешностей измерений, как видно из формул (1а) и (2а), приводит к различным значениям ε_1 и ε_2. Это ставит вопрос о выборе схемы, обеспечивающей меньшую относительную ошибку.

Подчеркнем, что выражения (1а) и (2а) еще непригодны для анализа вопроса о том, какая схема обеспечивает большую

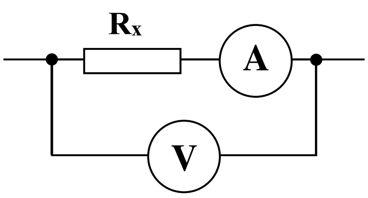

Рис. 1

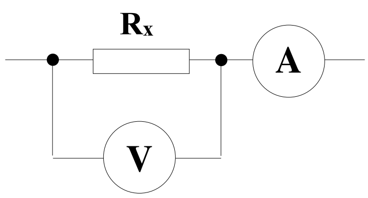

Рис. 2

точность измерений, так как в них фигурируют величины U_v и I_a, разные в схемах 1 и 2. Для сравнения величин ε_1 и ε_2 необходимо выразить их через характеристики приборов R_v, R_a, ΔU_v, ΔI_a и подаваемое на концы схем напряжение U.

В первом случае $U_v = U$, а ток I_a через амперметр и неизвестное сопротивление R_x равен:

$$I_a = \frac{U}{R_x + R_a}.$$

Подставляя эти значения U_v и I_a в (1а), получаем:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta U_v + (R_x + R_a)\cdot \Delta I_a}{UR_x}\cdot (R_x + R_a). \quad (3)$$

Во втором случае I_a – это ток в неразветвленной части цепи:

$$I_a = \frac{U}{R_a + \dfrac{R_x R_v}{R_x + R_v}},$$

а напряжение U_v, показываемое вольтметром, есть $U_v = U - I_a R_a$.

Подставляя эти выражения в (2а), находим:

$$\varepsilon_2 = \frac{[(R_x + R_v)\cdot \Delta U_v + R_x R_v \cdot \Delta I_a]\cdot (R_x R_a + R_x R_v + R_a R_v)}{UR_x R_v^2}. \quad (4)$$

Из выражений (3) и (4) следует, что в обоих случаях относительная ошибка измерений обратно пропорциональна приложенному напряжению U. Поэтому наивный вывод о том, что точность измерения будет всегда выше при использовании приборов с наименьшими значениями ΔU_v и ΔI_a, в общем случае неверен: например, может оказаться, что более высокая точность может быть достигнута при использовании приборов, допускающих бóльшие значения приложенного напряжения, хотя и имеющие бóльшие значения ΔU_v.

При сравнении относительных погрешностей ε_1 и ε_2 с помощью (3) и (4) получаем:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{[\Delta U_v + (R_x + R_v)\cdot \Delta I_a]\cdot (R_x + R_a)\cdot R_v^2}{[(R_x + R_v)\Delta U_v + R_x R_v \cdot \Delta I_a]\cdot (R_x R_a + R_x R_v + R_a R_v)}. \quad (5)$$

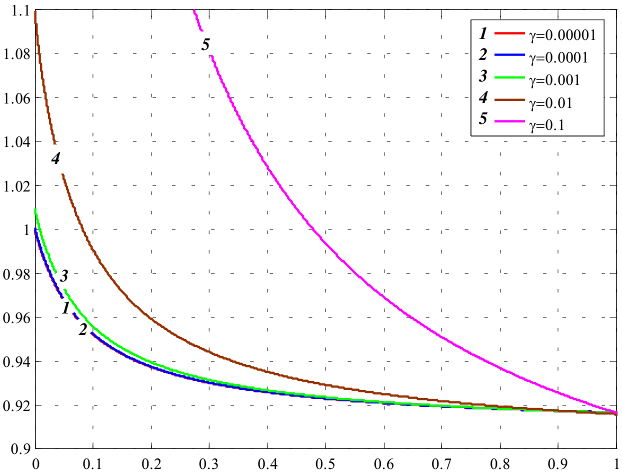

Рис. 3 ***а***

Видно, что величина отношения $\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ не зависит от приложенного напряжения U и определяется двумя независимыми безразмерными параметрами $\gamma = \dfrac{R_a}{R_v}$ ($\gamma << 1$) и $\Gamma = \dfrac{R_x}{R_v}$. Вводя величину $\Delta I_v = \dfrac{\Delta U_v}{R_v}$, переписываем соотношение (5) в виде:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} = \frac{[\Delta I_v + (\Gamma + \gamma)\cdot \Delta I_a]\cdot (\Gamma + \gamma)}{[\Delta I_v (\Gamma + \gamma) + \Gamma \cdot \Delta I_a]\cdot [\Gamma(1+\gamma) + \gamma]}. \quad (6)$$

Теперь видно, что фактически эффективной характеристикой вольтметра, определяющей отношение $\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$, является не цена деления, а «удельная» цена деления, равная отношению ΔU_v к сопротивлению вольтметра R_v.

Соотношение (6) соответствует всем предельным случаям, которые были установлены выше из качественных соображений. В частности, при условии $R_a << R_x << R_v$ имеем $\Gamma << 1$ и, учитывая, что $\gamma << 1$, получаем:

$$\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \approx 1.$$

Это означает, что в данном случае обе схемы обеспечивают практически одинаковую точность измерения. Однако соотношение (6) позволяет выяснить, какая из двух схем позволит более точно определить R_x при условии, что его величина лежит в интервале между R_a и R_v, в зависимости от параметра $\gamma = {}^{R_a}\!/_{R_v}$. Для этого построим, например, с помощью программы Matlab графики зависимости $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ от параметра Г, лежащего в интервале $\gamma < \Gamma < 1$, для различных значений γ, которые приведены на рис. 3 *а*, *б*.

На рис. 4 приведены результаты расчета $\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ в случаях, когда сопротивление R_x меньше сопротивления амперметра R_a (то есть при условии $\Gamma < \gamma << 1$), а на рис. 5*а*, *б* – при условии, когда R_x больше сопротивления вольтметра R_v (то есть при $\gamma << 1 < \Gamma$). Видно, насколько грубой может оказаться ошибка определения R_x при использовании неподходящей схемы, несмотря на то, что для нахождения R_x используются точные формулы (1) и (2).

Таким образом, проведенные расчеты позволяют не просто более осознанно подойти к выбору схемы измерения для определения неизвестного сопротивления, но и подобрать наиболее подходящее для условий эксперимента сочетание измерительных приборов, и, в конечном счете, уменьшить относительную погрешность измерения.

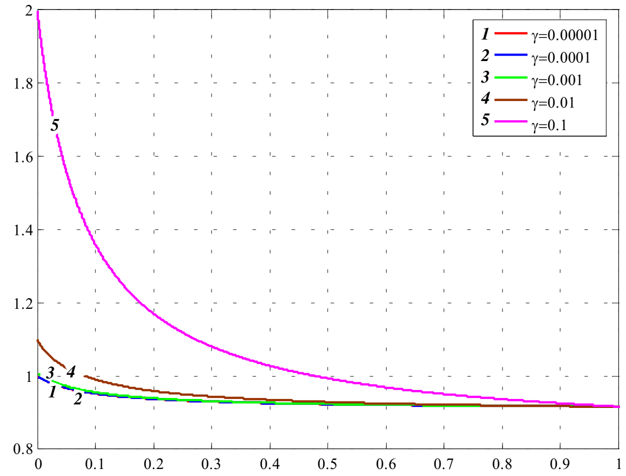

Рис. 3 *б*

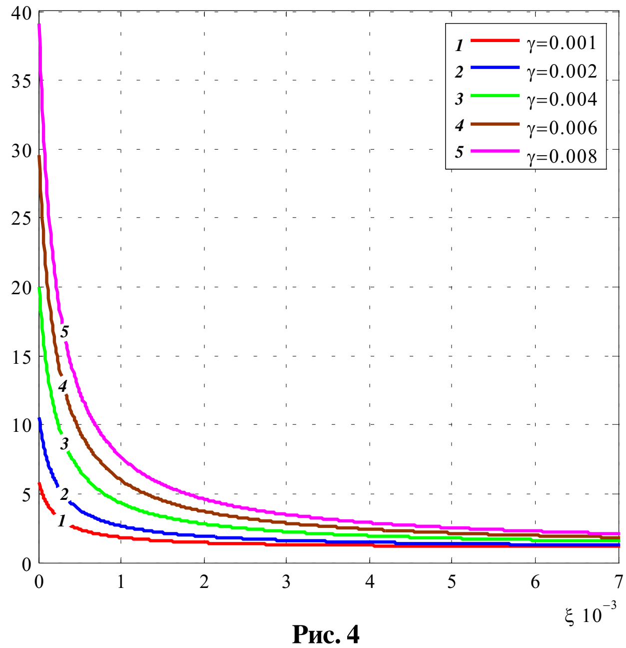

Рис. 4

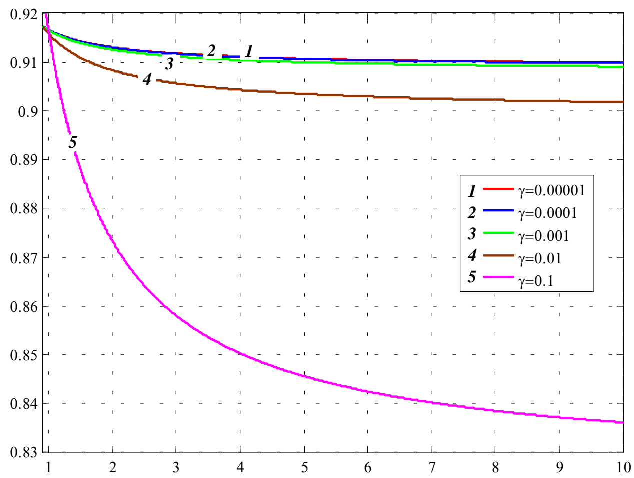

Рис. 5 *а*

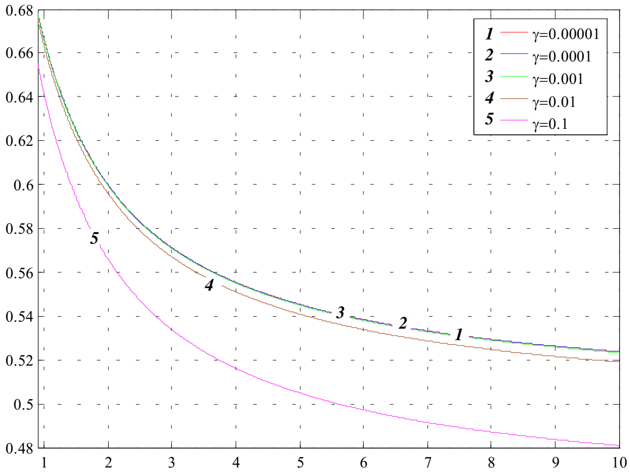

Рис. 5 *б*

Литература

1. Физический практикум. Под ред. *В.И. Ивероновой.* Издание третье. М., 1955.

2. *Зайдель А.Н.* Ошибки измерения физических величин. М.: Лань, 2005.

3. *Х.-И. Кунце.* Методы физических измерений. М., 1989.

4. *Бубликов С.В., Регель, А.А., Черны-шов Р.Б.* Обучение решению эксперимен-тальных задач по физике как средство интеллектуального развития учащихся. Учебное пособие. СПб., 2007.

5. *Бубликов С.В., Бойкова А.Е.* Оценка погрешности измерения сопротивления методом амперметра и вольтметра / Сб. «Физика в школе и вузе». Вып. 7. СПб., 2007.

Кондратьев Александр Сергеевич, академик РАО, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Методика обучения физике» РГПУ им. А.И. Герцена,

Ларченкова Людмила Анатольевна, кандидат педагогических наук, доцент кафедры «Методика обучения физике» РГПУ им. А.И. Герцена.