И в шутку и всерьез

Холшевников Константин Владиславович

О ФИГУРАХ РАВНОВЕСИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ (К 150-ЛЕТИЮ А.М. ЛЯПУНОВА)

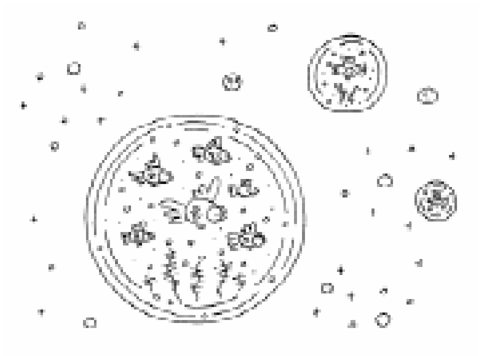
Могут ли небесные тела иметь форму груши?
Могут ли они иметь различные «длину», «ширину» и «высоту»?

6 июня 2007 г. исполнилось 150 лет со дня рождения знаменитого русского ученого Александра Михайловича Ляпунова. Эта дата широко отмечалась мировым научным сообществом. Так, 4–8 июня в Петербурге прошла международная конференция по проблемам нелинейных задач математики и математического естествознания, см. сайт http://www.math.spbu.ru/NDA2007/en/.

А.М. Ляпунов был истинным математиком, не терпевшим малейшей нестрогости рассуждений. Но не все знают, что основным делом своей жизни, своей первой и последней научной любовью он считал теорию фигур равновесия небесных тел. Из пяти томов академического собрания сочинений А.М. Ляпунова три посвящены ей, включая магистерскую диссертацию «Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости» и изданный посмертно труд «О некоторых рядах фигур равновесия неоднородной вращающейся жидкости». Эта тема имеет прямое отношение к астрономии, геодезии, геофизике.

А заинтересовал студента Ляпунова вопросом о формах небесных тел корифей математики Пафнутий Львович Чебышёв. Вспоминая об этом, Ляпунов позднее пишет: «Чебышёв всегда высказывал мнение, что заниматься легкими, хотя бы и новыми вопросами, которые можно разрешить общеизвестными методами, не стоит, и что всякий молодой ученый, если он уже приобрел некоторый навык в решении математических вопросов, должен попробовать свои силы на каком-либо серьезном вопросе, представляющем известные теоретические трудности».

В качестве темы магистерской диссертации Чебышёв поставил столь трудную математическую задачу, что даже талантливейший Ляпунов смог ее решить только через четверть века! Заметим сразу, что это не помешало ему написать блестящую магистерскую диссертацию на сходную (и с первого взгляда не менее трудную) тему. А затем он шаг за шагом создавал и совер-



Изолированная масса жидкости планетарных размеров под действием самогравитации становится в конце концов шаром.

шенствовал теорию фигур равновесия небесных тел, решив в конце концов поставленную его учителем задачу и много других трудных и интересных задач.

Что же за вопрос предложил профессор магистранту? Чтобы рассказать об этом, нужно сначала познакомиться с тем, что было известно к концу XIX века о форме небесных тел.

Древние греки еще в VI веке до н.э. считали небесные тела и Землю шарами. Тому были слабые наблюдательные указания, а главным аргументом был идеологический: небесные тела совершенны, шар математически совершенен, значит... Земля – центр Мира, и только шар обладает совершенным центром, значит... Редчайший в истории науки случай, когда ничем не обоснованные догмы дали правильный научный результат! Уже к III веку до н.э. шарообразность Солнца, Луны и Земли становится подкрепленным многими наблюдениями научным фактом, радиус Земли измеряется Эратосфеном, получившим правильный если не количественно, то качественно результат. С изобретением телескопа стала видна шарообразность всех планет. Но – как всегда в науке – ответ на один вопрос ставит несколько новых.

ПОЧЕМУ небесные тела шарообразны? ПОЧЕМУ Юпитер, и особенно Сатурн, не совсем шарообразны (рис. 1)? Они имеют форму сжатых эллипсоидов вращения. Сжатие их хотя и мало, но видно на глаз, без всяких измерений. Может быть, и другие планеты, включая Землю, сжаты, только сжатие их мало и обнаруживается точными измерениями?

ПОЧЕМУ малые небесные тела размером до 300 км в поперечнике имеют неправильную форму, напоминая скорее булыжники, чем правильные шары или элипсоиды? Правда, это заметили только в космическую эру, получив фотографии спутников Марса Фобоса (рис. 2) и Деймоса, а затем и многих других малых спутников, ядер комет, астероидов.

В XVII веке Р. Декарт высказывает гипотезу о вихревой природе всех движений, по которой планеты должны вращаться и принимать форму, близкую к шару, но при быстром вращении должны походить на вытянутые эллипсоиды вращения (рис. 3).

Гипотеза странная (взгляните на Сатурн в нашем Планетарии!) и тупиковая, и я не буду о ней больше говорить. Декарт – великий ученый, прославившийся многими открытиями, о них и будем помнить, а о его промахе забудем!

Ответ на выписанные чуть выше вопросы дал в конце XVII века великий И. Ньютон. Всемирное тяготение – вот сила, движущая мирами, и она же определяет форму небесных тел. Изолированная масса жидкости планетарных размеров под действием самогравитации становится в конце концов ша-

Рис. 1

Рис. 2

ром. В самом деле, жидкость всегда течет «вниз», и только на поверхности сферы нет ни «низа», ни «верха».

Только сфера может быть фигурой равновесия! Но это справедливо лишь для невращающейся жидкости. А если тело вращается (прав упрямый Галилей!), то о равновесии можно говорить только во вращающейся вместе с телом системе отсчета. А в ней возникают силы инерции, центробежные силы, известные каждому, знакомому с каруселью. Они стараются отбросить частицы жидкости от оси вращения и уменьшают тем самым влияние гравитации: тем сильнее, чем ближе к экватору.

Поэтому поверхность принимает сжатую форму, близкую к сплюснутому эллипсоиду вращения вокруг оси реального вращения тела (рис. 4). Юпитер вращается быстрее Земли, а Сатурн – быстрее Юпитера, они и более сжаты.

«Про Юпитер и Сатурн мне все понятно – скажет читатель – ведь планеты-гиганты – это газовые шары. Но как быть с Землей и вообще с твердыми планетами?» Ответ такой. Твердая кора планеты имеет предел прочности. Верхние слои давят на нижние, и, начиная с глубины в несколько километров, материал становится пластичным и медленно течет. В результате планета приобретает форму фигуры равновесия, как если бы она была жидкой. К счастью для нас, самая верхняя оболочка толщиной километров 10 (это одна тысячная от радиуса Земли) выдерживает давление, и мы видим горы, долины, впадины и прочие красоты природы. Как скучна была бы Земля, будь она в точности равновесной! Сплошной океан толщиной километра в 2–3, и нет на ней места ни коням, ни людям, а только рыбам и осьминогам! А для себя мы сделаем вывод, что поверхности реальных планет имеют форму, отклоняющуюся от формы фигур равновесия на сотые доли процента, и этой погрешностью дальше мы будем пренебрегать.

Интересно также, что чем меньше небесное тело, тем легче на нем горы, и тем выше они могут подыматься к небу. Поэтому спутники-крошки (по астрономическим масштабам, конечно) уже не могут считаться пластичными и сохраняют неправильную форму. Все тела размером менее 300 км – неправильной формы. Все тела крупнее 500 км – шары. Тела промежуточных размеров могут быть как шарами (если проходили стадию расплава), а могут быть булыжниками (если всегда были твердыми). Но оставим карликов и вернемся к телам планетарных размеров.

Пока мы ответили на интересующий нас вопрос для вращающихся небесных тел чисто качественно. За этим в точных науках следует ответ количественный.

Надо математически описать форму поверхности в зависимости от свойств тела: угловой скорости вращения и распределения масс внутри него.

Физически задача формулируется просто. Надо найти форму поверхности, в каждой точке которой равнодействующая гравитационных и центробежных сил была бы перпендикулярна этой поверхности (это и означает, что поверхность ровная, не опускается и не поднимается). Но соответствующие математические уравнения оказались нового, очень сложного вида. Ведь чтобы знать силу притяжения, надо знать форму той самой поверхности, которую мы ищем! До сих пор наука и близко не подошла к общему решению этих уравнений. Но некоторые важные решения получены.

В XVIII веке К. Маклорен открыл, что фигурами равновесия однородной жидкости могут служить названные впоследствии его именем сжатые эллипсоиды вращения.

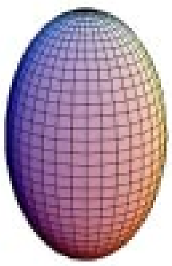


Рис. 3

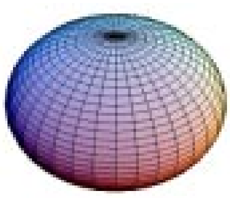


Рис. 4

Их можно представить как непрерывное семейство, каждая фигура которого может быть описана эксцентриситетом эллипса, образованного меридиональным сечением. С ростом эксцентриситета от 0 до e^* = 0.93 угловая скорость вращения ω растет от нуля до наибольшего значения ω (зависящего от массы и размеров тела), а затем с ростом эксцентриситета до единицы уменьшается до нуля. Между тем вращательный момент продолжает расти до бесконечности. Предельное значение не достигается, фигура превращается в истончающийся блин увеличивающихся неограниченно размеров. В XIX веке К.Якоби открыл удивительное явление: фигурами равновесия могут быть и трехосные эллипсоиды (рис. 5)! В согласии с интуицией все считали до Якоби, что вращающимися фигурами равновесия могут быть только тела вращения (это каламбур, но не тавтология!). Обратим внимание, что осью вращения эллипсоида Якоби как небесного тела служит наименьшая его ось.

Семейство эллипсоидов Якоби может быть параметризовано эксцентриситетом эллипса, образованного сечением плоскостью, проходящей через наименьшую и наибольшую ось. Семейство начинается с эллипсоида Маклорена эксцентриситета e_0 = 0.8126, а далее эллипсоиды имеют различные полуоси. С ростом эксцентриситета угловая скорость уменьшается, а сам эллипсоид становится бесконечно длинным и бесконечно тонким веретеном, вращающимся XIX века было высказано предположение, что от некоторых из эллипсоидов Маклорена и Якоби ответвляются новые, неэллипсоидальные фигуры равновесия.

Чебышёв поставил вопрос, не ответвляется ли от эллипсоида Маклорена эксцентриситета e^* новое семейство неэллипсоидальных фигур, вращающихся с большей скоростью, чем предельная для всех эллипсоидов ω^*? Ответ был получен после того, как задача была обобщена и заменена задачей о нахождении всех фигур равновесия, ответвляющихся от эллипсоидов Маклорена и Якоби, а также об устойчивости как самих эллипсоидов, так и неэллипсоидальных фигур (если таковые найдутся). Это парадоксально (все равно как вам бы задали на дом решить задачу номер 13, а вы бы решили все задачи из задачника – следовательно, в том числе и тринадцатую), но так часто бывает в математических науках.

Теперь мы в состоянии описать основные результаты Ляпунова в теории фигур равновесия небесных тел (рис. 6). Основным методом служил метод возмущений. Это значит, что мы должны иметь по крайней мере одно решение наших уравнений, и искать семейство близких к нему. Фактически ищутся малые отклонения от опорного решения. Поэтому квадратом его можно пренебречь и свести задачу к

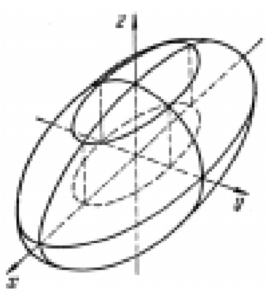


Рис. 5

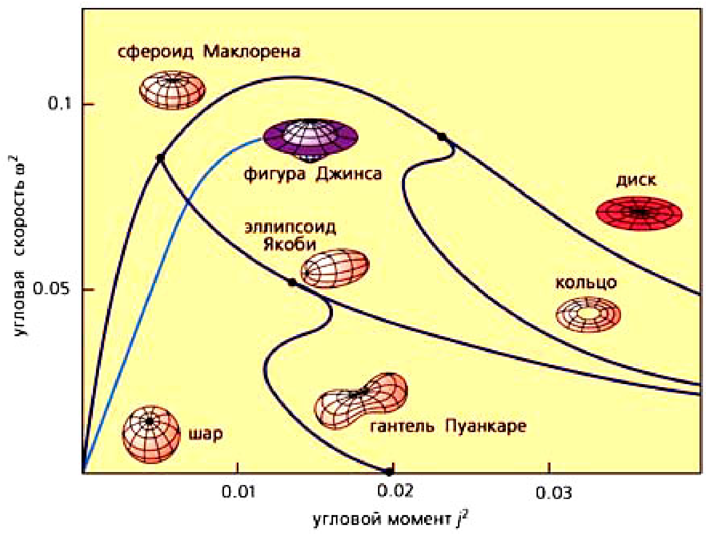


Рис. 6

линейной, относительно простой. Затем результат можно последовательно уточнять, в пределе получая точное решение.

1. Применяя метод возмущений, Ляпунов свел сложнейшее уравнение задачи о фигурах равновесия к цепочке относительно простых, линейных уравнений. Они принадлежат к уже изученному типу интегральных уравнений.

2. Обозначим через $E(e)$ эллипсоид Маклорена эксцентриситета e. Существует стремящаяся к единице возрастающая последовательность e_n со следующими свойствами. Если эксцентриситет эллипсоида Маклорена не равен ни одному из членов этой последовательности, то ответвляющихся от него неэллипсоидальных фигур равновесия нет, тогда как при $e = e_n$ появляется семейство таких фигур.

Первый критический эллипсоид $E(e_1)$ лежит между эллипсоидом вращения Якоби и эллипсоидом Маклорена максимальной угловой скорости, эксцентриситеты остальных превышают e^*.

Таким образом, ответ на вопрос Чебышёва отрицателен: не существует никаких однородных фигур, близких к эллипсоидам Маклорена, для которых угловая скорость вращения превышала бы ω^*.

Аналогичные семейства открыты и для эллипсоидов Якоби. Первый критический эллипсоид появляется при $e = e^{(1)} = 0.94$. От него ответвляется семейство грушевидных фигур равновесия.

3. Эллипсоиды Маклорена устойчивы, если их эксцентриситет не превосходит e_0, и неустойчивы в противном случае. Устойчивость же переходит к эллипсоидам Якоби: они устойчивы, если их эксцентриситет меньше $e^{(1)}$. Начиная от $e^{(1)}$, устойчивых эллипсоидов нет.

4. Все неэллипсоидальные фигуры равновесия, ответвляющиеся от эллипсоидов Маклорена и Якоби, неустойчивы.

Этот результат поставил крест на гипотезе отрыва Луны от Земли в результате сжатия последней и соответствующего увеличения угловой скорости. Предполагалось, что форма Земли плавно менялась вдоль цепочки эллипсоидов Маклорена, затем Якоби, затем грушевидных фигур, за последней из которых следовал отрыв тела, ставшего впоследствии Луной. Сценарий невозможен из-за потери устойчивости уже на стадии последнего эллипсоида Якоби. Ярый сторонник этой гипотезы Дж. Дарвин долго настаивал, что грушевидные фигуры устойчивы, пока результаты Ляпунова (а его выкладки действительно трудно воспроизвести и проверить) не были подтверждены Дж. Джинсом.

5. Для медленно вращающихся тел произвольной структуры Ляпунов создал алгоритм, позволяющий находить форму не только самой фигуры равновесия, но и всех поверхностей равной плотности и давления. Форма поверхностей представляется рядом по степеням малого вместе с угловой скоростью параметра. Медленность вращения нужна для сходимости ряда (напомню, что известный школьникам ряд – геометрическая прогресия – сходится, если малый параметр, то есть знаменатель прогрессии, меньше единицы). Вдобавок устанавливаются важные свойства медленно вращающихся фигур. Они все являются телами вращения и симметричны относительно экваториальной плоскости.

Замечу во избежание недоразумений, что медленность вращения определяется по вращательному моменту, а не угловой скорости. Так что все эллипсоиды Якоби и эллипсоиды Маклорена при $e > e_1$ вра-

Этот результат поставил крест на гипотезе отрыва Луны от Земли...

щаются быстро и не описываются рассматриваемым алгоритмом.

Приятно отметить, что радиус сходимости рядов Ляпунова оказался на удивление большим (его удалось получить для некоторых фигур на нашей кафедре уже в этом веке, пользуясь возможностями современных ЭВМ производить алгебраические манипуляции с рядами). Так, ряд сходится для всех эллипсоидов Маклорена вплоть до эллипсоида наибольшей угловой скорости с эксцентриситетом $e = e^* = 0.93$.

А ведь трудно считать такой эллипсоид слабосжатым! Результат для сосредоточенной в центре массы, окруженной невесомой вращающейся атмосферой, еще удивительнее.

Ряд сходится вплоть до фигуры максимальной угловой скорости, имеющей ребро на экваторе! Частица на экваторе здесь ничего не весит. Сравните со слабосжатой Землей, где одна и та же масса весит на экваторе меньше, чем на полюсе, всего на долю процента.

Результаты о сходимости «медленно» вращающихся фигур имеют наибольшее практическое значение, поскольку все крупные небесные тела (с диаметром более 1000 км) неоднородны, и почти все вращаются медленно. В Солнечной системе исключений нет. В Галактике неприемлемо быстро для теории Ляпунова вращаются лишь некоторые белые карлики и нейтронные звезды.

Выше говорилось, что Земля, например, отклоняется от фигуры равновесия из-за твердости своей поверхности. Высочайшие горы и впадины имеют размер около 10 км, так что относительное уклонение от равновесного тела составляет примерно 10^{-3}. Но это – мелкие в масштабах планеты неоднородности. Для геофизики больший интерес представляет уклонение гравитационного поля Земли от поля равновесной фигуры. Теория Ляпунова дает довольно точную количественную оценку. Фигура равновесия симметрична относительно экваториальной плоскости.

Асимметрия гравитационного поля северного и южного полушарий Земли имеет порядок 10^{-6} от основного поля. Это и есть мера отклонения сглаженной Земли от равновесной фигуры.

Холшевников Константин Владиславович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий Кафедрой небесной механики СПбГУ, академик РАЕН.