

## ЗАПОЛНЕНИЕ ПРОСТРАНСТВА ПОЛУПРАВИЛЬНЫМИ МНОГОГРАННИКАМИ В ВИРТУАЛЬНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Задача заполнения пространства правильными многогранниками в общей постановке еще не решена. Здесь мы хотим решить гораздо более простую задачу заполнения пространства полуправильными выпуклыми многогранниками (Архимедовыми телами), применяя методы элементарной геометрии. При этом для необходимых здесь визуализации построений и измерений используется система Cabri 3D. Этот инструмент эффективен как в процессе решения задач, так и при оформлении результатов.

Вводя такой познавательный инструмент как Cabri 3D, мы преследуем среди прочего следующие цели:

- обучение геометрическому видению и опыту работы в виртуальном пространстве как в рабочей среде,
- признание пользы стереометрии,
- получение, применение, расширение и систематизация знаний в стереометрии (понятия, утверждения и процессы),
- экспериментальное изучение и эвристический анализ пространственных задач,
- достижение свободы в применении Cabri 3D.

Система Cabri 3D поддерживает разнообразные методы и формы работы, которые применялись уже и в системах двумерной геометрии. В частности, поддерживаются следующие методы:

- *визуализация* статической и динамической информации (например, для понимания пространственных явлений),
- *индукция* (построение множества примеров путем варьирования фигуры),

– *метод аналогий* (например, изучение аналогий между планиметрией и стереометрией),

– *соединение и систематизация* планиметрии и стереометрии (в основаниях),

– *оперативный метод* (поиск инвариантов),

– *экспериментальный метод* (пропедевтика в геометрии – Vive le bricoleur! – Да здравствует мастер !),

– *упрощение* (например, затемнение каких-то деталей),

– *работа с модулями* (использование готовых форм),

– *откат назад* (использование Undo-Redo-функции).

Заполнение пространства архимедовыми призмами (призма с одинаковыми ребрами и правильным многоугольником в основании) соответствует заполнению плоскости правильными выпуклыми многоугольниками [9] (пример для правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника на рис. 1.1).

Заполнение пространства называется Архимедовым, если оно состоит из Архимедовых, включая Платоновы, тел и при этом:

– в каждой вершине встречается одинаковое число одинаковых многоугольников,

– каждое ребро и грань одного многогранника является ребром и соответственно гранью другого многогранника,

– для любых двух углов существует конгруэнтное отображение (параллельный перенос, вращение вокруг оси, симметрия относительно точки или оси, винтовое движение, сдвиг с отражением, вращение с отражением), переводящее в себя все заполнение.

Пример такого заполнения показан на рис. 1.2. По аналогии с заполнением плоскости, заполнение пространства получается с помощью куба, треугольной и шестиугольной Архимедовых призм.

## 2. ПУТЬ РЕШЕНИЯ (KANTENSCHLUSS-KOMBINATIONEN)

Как показано выше, от заполнения плоскости легко перейти к заполнению пространства, поэтому обратимся к заполнению пространства, которое состоит не только из призм. Информация в Интернете о таких заполнениях недостаточна. Такой серьезный источник как «MathWorld» сообщает лишь следующее: «Однако комбинация тетраэдра и октаэдра действительно заполняет пространство... Кроме того, октаэдр, усеченные октаэдры и кубы, соединенные в отношении 1:1:3, также могут заполнить пространство... В 1914, Förpl открыл заполняющую пространство комбинацию тетраэдра и усеченного тетраэдра». (<http://mathworld.wolfram.com/Space-FillingPolyhedron.html>).

Найти новые заполнения можно, систематизируя такие расположения Архимедовых тел вокруг общего ребра, в которых соседние тела имеют общие конгруэнтные грани. Двугранные углы этих многогранников на общем ребре должны составлять полный угол ( $360^\circ$ ). Найденные таким образом комбинации многогранников нужно дополнить Архимедовыми телами до заполнения всего пространства.

Следующие 10 многогранников годятся для того чтобы создавать замкнутую группу

вокруг ребра: тетраэдр, куб, октаэдр, восьмиугольная призма, усеченный тетраэдр, усеченный куб, усеченный октаэдр, кубоктаэдр, усеченный кубоктаэдр, ромбокубоктаэдр (рис. 2.1–2.10). Архимедовы тела среди перечисленных тел строятся в Cabri 3D таким образом, что их размер можно менять, потянув за одну из вершин.

Исходным материалом для создания физической модели служит развертка, прилагаемая в качестве добавления к исходной модели.

Суммы двугранных углов других Платоновых и Архимедовых тел, за исключением Архимедовых призм, не образуют полного угла, и, значит, такие тела не могут быть использованы для построения заполнения пространства. Эти тела в дальнейших рассмотрениях не участвуют.

Тела, упорядоченные по величине двугранного угла (для правильных граней используются следующие сокращения:  $D$  – треугольник,  $Q$  – квадрат,  $S$  – шестиугольник,  $A$  – восьмиугольник; углы указаны с точностью до одного знака после запятой, за исключением  $90^\circ$  и  $135^\circ$ ):

$70,5^\circ$ : тетраэдр ( $D-D$ ), усеченный тетраэдр ( $S-S$ ).

$90^\circ$ : куб ( $Q-Q$ ), усеченный куб ( $A-A$ ), восьмиугольная призма ( $Q-A$ ).

$109,5^\circ$ : октаэдр ( $D-D$ ), усеченный тетраэдр ( $D-S$ ), усеченный октаэдр ( $S-S$ ).

$125,3^\circ$ : усеченный куб ( $D-Q$ ), усеченный октаэдр ( $Q-S$ ), кубоктаэдр ( $D-Q$ ), усеченный кубоктаэдр ( $S-A$ ).

$135^\circ$ : восьмиугольная призма ( $Q-Q$ ), усеченный кубоктаэдр ( $Q-A$ ), ромбокубоктаэдр ( $Q-Q$ ).

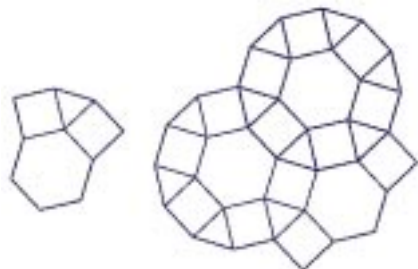


Рис. 1.1

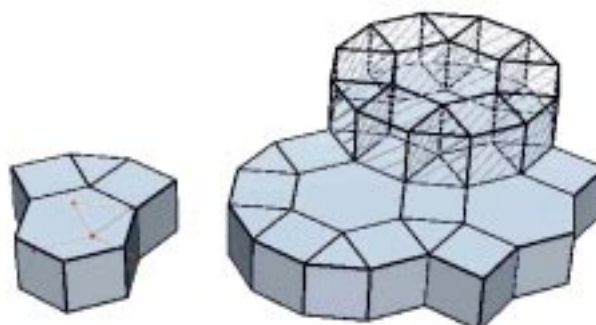


Рис. 1.2



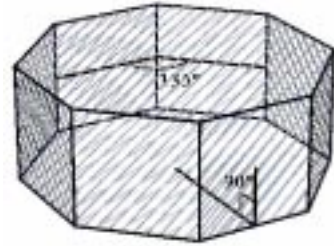
**Рис. 2.1.** Тетраэдр



**Рис. 2.2.** Куб



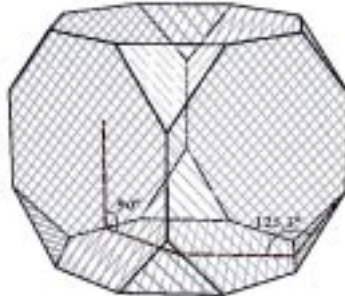
**Рис. 2.3.** Октаэдр



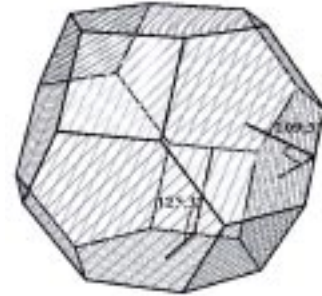
**Рис. 2.4.** Восьмиугольная  
призма



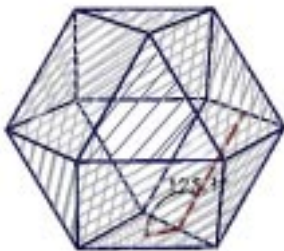
**Рис. 2.5.** Усеченный  
тетраэдр



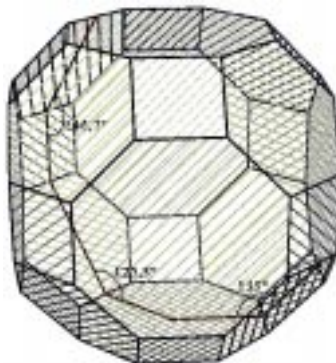
**Рис. 2.6.** Усеченный куб



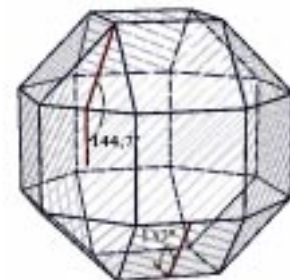
**Рис. 2.7.** Усеченный  
октаэдр



**Рис. 2.8.** Кубоктаэдр



**Рис. 2.9.** Усеченный кубоктаэдр



**Рис. 2.10.** Ромбокубкаэдр

144,7°: усеченный кубоктаэдр ( $Q-S$ ),  
ромбокубкаэдр ( $D-Q$ )

Необходимым условием для заполнения пространства является образование полного угла из двугранных углов с общим ребром. Это равносильно разложению  $360^\circ$  на сумму указанных выше углов.

Подходящие суммы таковы:

$$\begin{aligned} &90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ \\ &90^\circ + 90^\circ + 70,5^\circ + 109,5^\circ \\ &90^\circ + 70,5^\circ + 90^\circ + 109,5^\circ \\ &90^\circ + 135^\circ + 135^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &90^\circ + 125,3^\circ + 144,7^\circ \\ &70,5^\circ + 70,5^\circ + 109,5^\circ + 109,5^\circ \\ &70,5^\circ + 109,5^\circ + 70,5^\circ + 109,5^\circ \\ &70,5^\circ + 144,7^\circ + 144,7^\circ \\ &109,5^\circ + 125,3^\circ + 125,3^\circ \end{aligned}$$

Более 4 тел не могут иметь общего ребра, но суммы 2 и 3 тел не годятся, так как куб, усеченный куб и восьмиугольная призма с углами  $70,5^\circ$  и  $109,5^\circ$  не имеют подходящих общих граней. Остаются для исследования 7 сумм:

$$(2) 90^\circ + 135^\circ + 135^\circ$$

- (3)  $90^\circ + 125,3^\circ + 144,7^\circ$   
 (4)  $70,5^\circ + 70,5^\circ + 109,5^\circ + 109,5^\circ$   
 (5)  $70,5^\circ + 109,5^\circ + 70,5^\circ + 109,5^\circ$   
 (6)  $70,5^\circ + 144,7^\circ + 144,7^\circ$   
 (7)  $109,5^\circ + 125,3^\circ + 125,3^\circ$

Для каждой суммы и каждого слагаемого в ней нужно указать соседние тела, имеющие одинаковые общие грани.

Получаем 25 комбинаций тел (в таблице слева вверху указан номер суммы, а справа – сокращенное обозначение комбинации тел; комбинация из четырех кубов не приведена).

Обозначения тел:  $T$  – тетраэдр,  $GT$  – усеченный тетраэдр,  $W$  – куб,  $GW$  – усеченный куб,  $O$  – октаэдр,  $GO$  – усеченный октаэдр,  $KO$  – кубоктаэдр,  $GKO$  – усеченный кубоктаэдр,  $RKO$  – ромбокубоктаэдр,  $AP$  – восьмиугольная призма.

### 3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ (ЗАПОЛНЕНИЕ УГЛОВ)

Подходящие конфигурации вокруг ребра нужно дополнить многогранниками, образующими замкнутую конфигурацию вокруг углов. Ниже приводятся 13 типов конфигураций с их номерами из табл. 1, а в скобках указаны дополняющие конфигурации:

№ 0 ( $4W$ ): 8 кубов: Тип  $W$

№ 1 ( $O, 4GW$ ), № 20 ( $6GW$ ): октаэдр – 4 усеченных куба: Тип  $O-GW$

№ 2 ( $RKO$ ), № 3 ( $AP, GW$ ), № 12 ( $W, AP$ ): куб – 2 восьмиугольные призмы – усеченный куб – ромбокубоктаэдр: Тип  $W-AP-RKO$

№ 4 ( $GKO$ ), № 5 ( $AP$ ): 2 восьмиугольные призмы – 2 усеченный кубоктаэдр: Тип  $AP-GKO$

№ 6 ( $GO$ ), № 11 ( $GKO$ ), № 24 ( $W$ ): куб – усеченный октаэдр – 2 усеченных кубоктаэдра: Тип  $W-GO-GKO$

№ 7 ( $GT$ ), № 18 ( $GW$ ), № 22 ( $GKO$ ): усеченный тетраэдр – усеченный куб – 2 усеченных кубоктаэдра: Тип  $GT-GW-GKO$

№ 8 ( $W, KO$ ), № 10 ( $W, RKO$ ): 2 куба – кубоктаэдр – 2 ромбокубоктаэдра: Тип  $W-KO-RKO$

№ 9 ( $T, RKO$ ), № 17 ( $W, RKO$ ): тетраэдр – куб – 3 ромбокубоктаэдра: Тип  $T-W-RKO$

№ 13 ( $4GT$ ), № 15 ( $T, 3GT$ ): 2 тетраэдра – 6 усеченных тетраэдров: Тип  $T-GT$

№ 14 ( $6T, 4O$ ): 8 тетраэдров – 6 октаэдров: Тип  $T-O$

№ 16 ( $KO$ ), № 23 ( $GO$ ): 2 усеченных тетраэдра – 2 усеченных октаэдра – кубоктаэдр: Тип  $GT-GO-KO$

№ 19 ( $GO$ ): 4 усеченных октаэдра: Тип  $GO$

№ 21 ( $O, 2KO$ ): 2 октаэдра – 4 кубоктаэдра: Тип  $O-KO$

Около куба можно построить заполнение лишь с усеченными октаэдрами, если использовать только Архимедовы тела.

Далее типы заполнения будут показаны по мере их получения, и, в частности, порождающая их конфигурация «угловое замыкание», а также повторение этой конфигурации в пространстве с помощью соответствующего отображения и эстетически интересный фрагмент заполнения.

Кроме того, на одном примере из архитектуры будет показано практическое значение заполнений пространства Архимедовыми телами для архитектурного оформления пространства.

Классифицировать эти конфигурации и соответствующие заполнения также можно по

- виду и числу порождающих их тел,
- виду и числу многогранников, имеющих общую вершину,
- свойствам симметрии,
- типу порождающего отображения.

#### 3.1. 8 кубов $W$

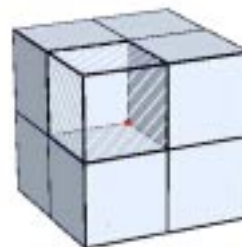
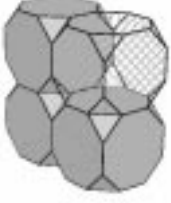
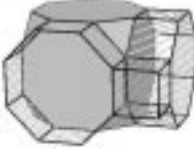
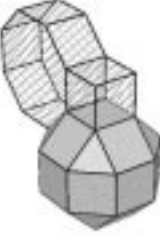
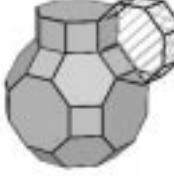








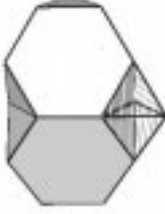


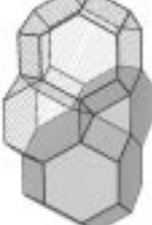



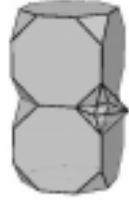



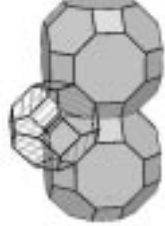


Рис. 3.1. Угловое замыкание



**Табл. 1.** Комбинации тел, образующих замыкание вокруг ребра

(1) (2)  Nr. 1	(1) <i>W-2AP-GW</i>  Nr. 2	(2) <i>AP-W-RKO</i>  Nr. 3	(2) <i>2AP-GKO</i>  Nr. 4
(2) <i>AP-2GKO</i>  Nr. 5	(2) <i>W-2GKO</i>  Nr. 6	(2) <i>GW-2GKO</i>  Nr. 7	(2) <i>W-2RKO</i>  Nr. 8
(2) <i>W-2RKO</i>  Nr. 9	(3) <i>W-KO-RKO</i>  Nr. 10	(3) <i>W-GO-GKO</i>  Nr. 11	(3) <i>AP-GW-RKO</i>  Nr. 12
(4) <i>2T-2GT</i>  Nr. 13	(5) <i>2T-2O</i>  Nr. 14	(5) <i>T-3GT</i>  Nr. 15	(5) <i>2GT-2GO</i>  Nr. 16
(6) <i>T-2RKO</i>  Nr. 17	(6) (7) <i>GT-2GKO</i>  Nr. 18	(7) <i>3GO</i>  Nr. 19	(7) <i>O-2GW</i>  Nr. 20
(7) <i>O-2KO</i>  Nr. 21	(7) <i>GT-GW-GKO</i>  Nr. 22	(7) <i>GT-GO-KO</i>  Nr. 23	(7) <i>GO-2GKO</i>  Nr. 24

3.2. Октаэдр – 4 усеченных куба (*O-W*)



Рис. 3.2.1. Угловое замыкание

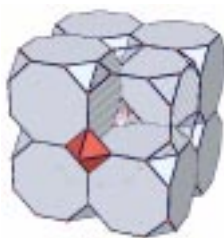


Рис. 3.2.2. Параллельный перенос

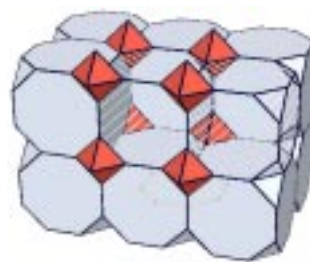


Рис. 3.2.3. Фрагмент заполнения

3.3. Куб – восьмиугольные призмы – усеченный куб – ромбокубоктаэдр (*W-AP-GW-RKO*)

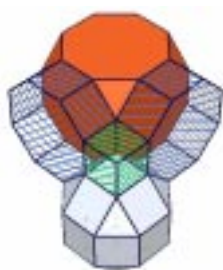


Рис. 3.3.1. Угловое замыкание



Рис. 3.3.2. Параллельный перенос / симметрия относительно прямой

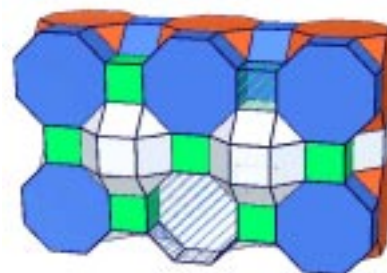


Рис. 3.3.3. Фрагмент заполнения

3.4. 2 восьмиугольные призмы – 2 усеченных кубоктаэдра (*AP-GKO*)

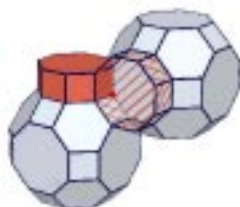


Рис. 3.4.1. Угловое замыкание

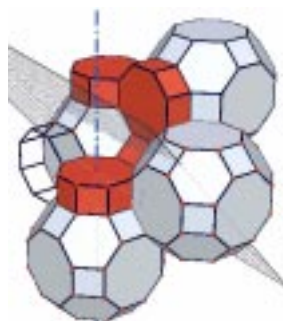


Рис. 3.4.2. Поворот на 90° / симметрия относительно плоскости

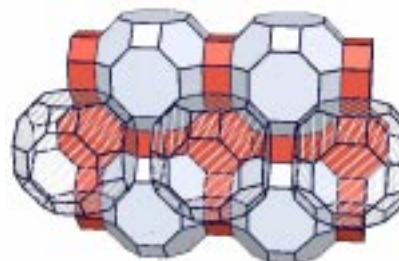


Рис. 3.4.3. Фрагмент заполнения

3.5. Куб – усеченный октаэдр – 2 усеченных кубоктаэдра (*W-GO-GKO*)

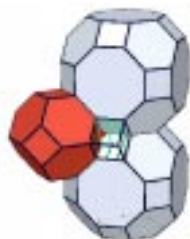


Рис. 3.5.1. Угловое замыкание

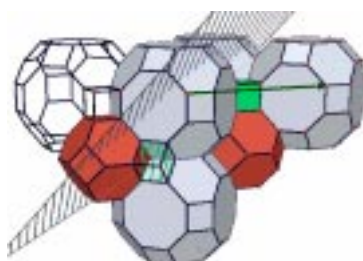


Рис. 3.5.2. Параллельный перенос / симметрия относительно плоскости

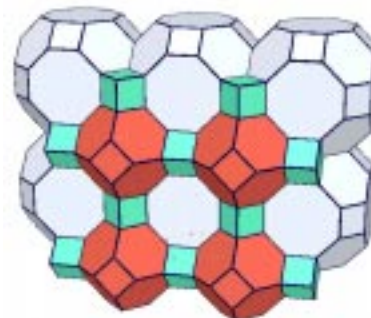


Рис. 3.5.3. Фрагмент заполнения

3.6. Усеченный тетраэдр – усеченный куб – 2 усеченных кубоктаэдра ( $GT-GW-GKO$ )



Рис. 3.6.1. Угловое замыкание

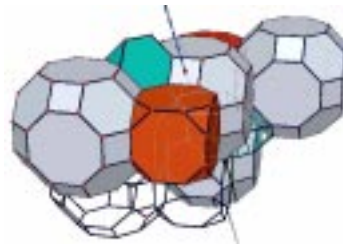


Рис. 3.6.2. Параллельный перенос / симметрия относительно прямой

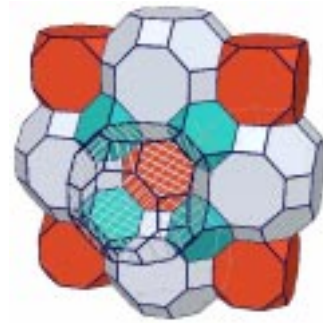


Рис. 3.6.3. Фрагмент заполнения

3.7. 2 куба – кубоктаэдр – 2 ромбокубоктаэдра ( $W-KO-RKO$ )



Рис. 3.7.1. Угловое замыкание

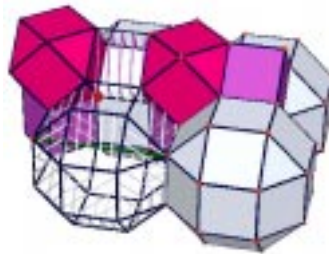


Рис. 3.7.2. Параллельный перенос

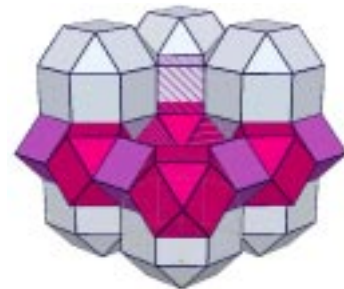


Рис. 3.7.3. Фрагмент заполнения

3.8. Тетраэдр – куб – 3 ромбокубоктаэдра ( $T-W-RKO$ )



Рис. 3.8.1. Угловое замыкание

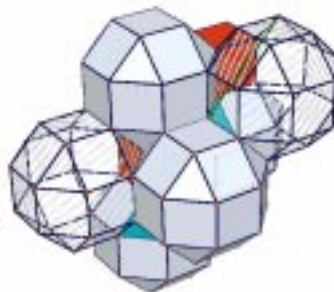


Рис. 3.8.2. Параллельный перенос

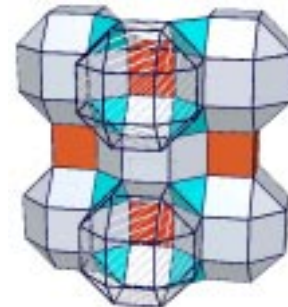


Рис. 3.8.3. Фрагмент заполнения

3.9. 2 тетраэдра – 6 усеченных тетраэдра ( $T-GT$ )

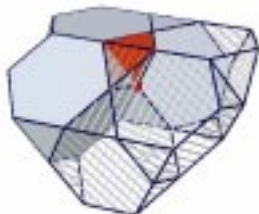


Рис. 3.9.1. Угловое замыкание

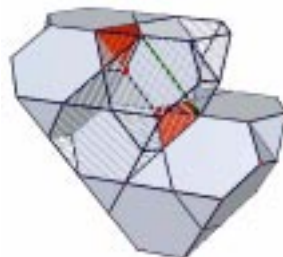


Рис. 3.9.2. Параллельный перенос

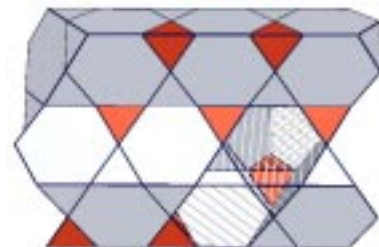


Рис. 3.9.3. Фрагмент заполнения



3.10. 2 Усеченных тетраэдра – 2 усеченных октаэдра – кубоктаэдр (*GT-GO-KO*)

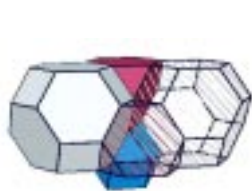


Рис. 3.10.1. Угловое замыкание

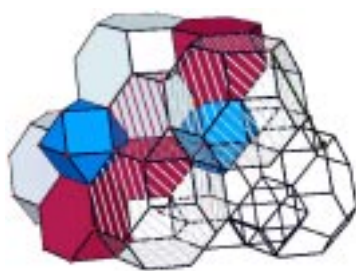


Рис. 3.10.2. Параллельный перенос и симметрия относительно точки

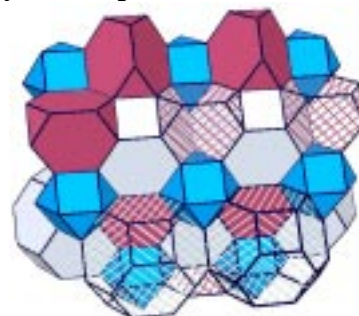


Рис. 3.10.3. Фрагмент заполнения

Применение заполнения типа *GT-GO-KO* в архитектуре: в синагоге, построенной в 1968/70 в городе Мицпе Рамон (Израиль) (рис. 3.10.4), проявляется симметричное заполнение пространства типа *GT-GO-KO*. На рис. 3.10.5 показана построенная в Cabri 3D на основании фотографии модель в различных ракурсах.



Рис 3.10.4. Синагога в Мицпе Рамон



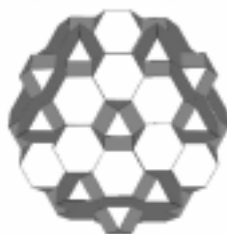
вид спереди



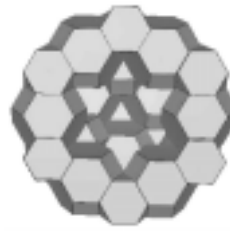
вид сбоку



вид сзади



вид сверху



вид снизу

Рис. 3.10.5

3.11. 4 усеченных октаэдра (*GO*)

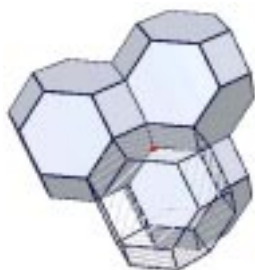


Рис. 3.11.1. Угловое замыкание

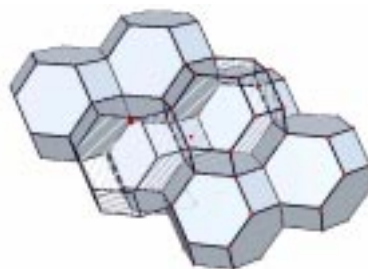


Рис. 3.11.2. Симметрия относительно точки

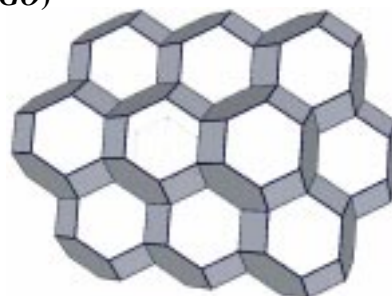


Рис. 3.11.3. Фрагмент заполнения



3.12. 2 октаэдра – 4 кубоктаэдра (O–KO)



Рис. 3.12.1. Угловое замыкание



Рис. 3.12.2. Параллельный перенос

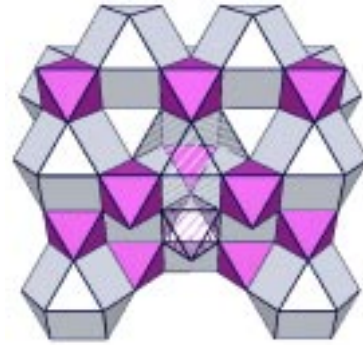


Рис. 3.12.3. Фрагмент заполнения

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Описанное выше исследование может быть обобщено путем рассмотрения заполнений пространства Джонсоновыми телами, то есть выпуклыми многогранниками, у которых грани – правильные многоугольники. Аналогичное исследование возможно также для тел, двойственных к Архиме-

довым, – Каталановым. Для них общеизвестно заполнение пространства ромбододекаэдрами.

Наконец, к задаче заполнения многогранниками близка задача упаковки шаров, а также задачи кристаллографии.

Cabri 3D может эффективно использоваться в этих областях для исследований, решения задач и документации результатов.

Литература

1. Alexandroff, P. S. et al. (Hg.) (1969): Enzyklopädie der Elementarmathematik, Bd. IV Geometrie. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.
2. Bainville, E., Laborde, J.-M. (2005/2006): Cabri 3D 2.0. (Software). Grenoble: Cabrilog, [www.cabri.com](http://www.cabri.com).
3. Schumann, H. (2004): Entdeckung von Analogien mit Cabri 3D am Beispiel «Dreieck – Tetraeder». In: math. did. 27. Bd. 1. S. 82–99.
4. Schumann, H. (2005): Dynamische Raumgeometrie. In: Beiträge zum 1. Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, S.
5. Schumann, H. (2005): Interaktives Modellieren im virtuellen Raum. In: LOG IN Heft Nr. 133. S. 55–61.
7. Schumann, H. (2006): Interaktives Konstruieren im Raum mit Cabri 3D. Rosenheim: co.Tec Verlag.
8. Schumann, H. (2006): Interaktives Analogisieren ebener Geometrie im virtuellen Raum. In: Der Mathematikunterricht, MU 6 (52). S. 37–60.
9. Klotzek, B. u. a. (1985): kombinieren, parkettieren, färben. Köln: Aulis.
10. <http://mathworld.wolfram.com/Space-FillingPolyhedron.html> (Zugriff: Dezember 2006).
11. <http://www.math-inf.uni-greifswald.de/mathematik+kunst/synagoge.html> (Zugriff: Dezember 2006).

**Prof. Dr. Heinz Schumann**  
Faculty III, Mathematics/Informatics,  
University of Education Weingarten  
D-88250 Weingarten, Germany  
[schumann@ph-weingarten.de](mailto:schumann@ph-weingarten.de)

Перевод М. Юдовина



Наши авторы, 2007  
Our authors, 2007