

*Дубровский Владимир Натанович,
Лебедева Наталья Анатольевна,
Белайчук Олег Анатольевич*

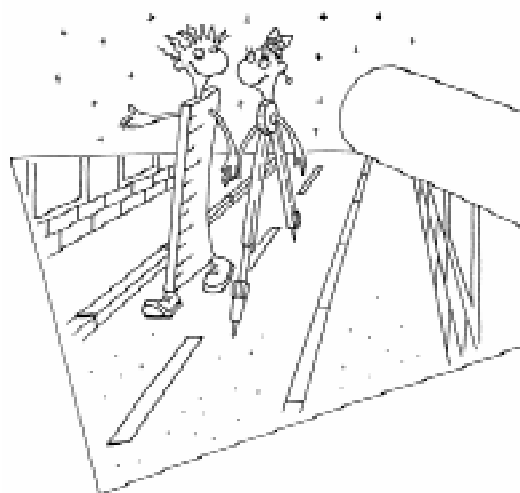
1С:МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОНСТРУКТОР – НОВАЯ ПРОГРАММА ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Идея программ динамической геометрии, или интерактивных геометрических систем (ИГС), насчитывает уже около 20 лет. Сегодня программы этого класса широко признаны во всем мире как наиболее эффективное средство обучения математике в области ИКТ. Наибольшее распространение среди них получили Cabri (Франция) и The Geometer's Sketchpad (США, в русских версиях последняя известна как «Живая Геометрия» и «Живая Математика»). В самое последнее время появляются и конкурентоспособные ИГС российских производителей. Мы расскажем об особенностях «1С:Математического конструктора» (МК), но сначала – о программах динамической геометрии вообще и их возможных применениях.

Говоря коротко, программа динамической геометрии – это среда, позволяющая создавать динамические чертежи, то есть компьютерные геометрические чертежи-модели, исходные данные которых можно варьировать с сохранением всего алгоритма построения, просматривать их и работать с ними. Основным инструментарием этих программ являются виртуальные линейка и циркуль, аналогичные одноименным евклидовым чертежным инструментам. Кроме них, пользователь получает возможность быстрого выполнения таких важнейших построений, как проведение перпендикуляров и параллелей к данным прямым, нахождение середин отрезков, и более сложных – гео-

метрических преобразований, построений объектов, задаваемых аналитически в координатах. Как правило, базовый инструментарий ИГС включает и команды построения однопараметрических семейств фигур, в частности, геометрических мест точек. Набор команд можно расширять, создавая собственные макросы. Конструктивные возможности дополняются средствами измерения различных величин и вычислений.

Наряду с геометрическим и, вообще, математическим функционалом, ИГС обладают некоторыми основными возможностями, характерными для графических редакторов, а также средствами создания своего рода математических презентаций, содержащих текстовые комментарии к чер-



тежам, анимации, кнопок управления изображением.

Более конкретное представление о различных видах обучающих динамических чертежей и их месте в учебном процессе дадут приводимые ниже примеры моделей, изготовленных с помощью «Математического конструктора».

ПРИМЕРЫ ДИНАМИЧЕСКИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЧЕРТЕЖЕЙ

Спектр типов динамических чертежей, с точки зрения целей и методики их применения, весьма широк. Наш набор примеров выстроен, прежде всего, по «шкале интерактивности»: мы начнем с чертежей иллюстративного плана, рассчитанных, в основном на пассивное восприятие учащихся, далее познакомимся с готовыми моделями для экспериментов и исследований, затем с заданиями, в которых пользователи должны самостоятельно строить новые объекты и, наконец, коснемся заданий с элементами программирования.

1. ЧЕРТЕЖИ-ИЛЛУСТРАЦИИ

Наиболее очевидный, но и наиболее востребованный на практике вариант применения Математического конструктора (как, впрочем, и других ИГС) – рисование чертежей-иллюстраций к геометрическим задачам. Преимущества, которые дают эти системы, состоят в простоте выполнения геометри-

ческих построений, сравнимой с рисованием на бумаге от руки, аккуратностью и широкими оформительскими возможностями, присущими компьютерным графическим редакторам, возможностью редактирования, отличающей векторные редакторы, но, главное, – возможностью изменять начальные данные конструкции при сохранении алгоритма построения и, следовательно, геометрического смысла итоговой конфигурации. Тем самым, выполнив одно построение, мы сразу получаем целое семейство конструкций с одинаковой геометрической структурой. Отметим и то, что инструментарий ИГС включает специфические команды (например, проведение окружностей при разных наборах данных элементов или проведение серединного перпендикуляра к отрезку), облегчающие именно геометрические построения.

В результате чертеж такой относительно сложной конфигурации, как известная «окружность 9 точек» (пример 1.1) создается буквально за пару минут.

2. МОДЕЛИ ДЛЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ИССЛЕДОВАНИЯ

Отмеченная выше ключевая особенность динамических чертежей, отраженная в самом термине, состоит в том, что, в отличие от начерченного на бумаге, классной доске или даже в графическом редакторе, такой чертеж представляет не индивидуальную геометрическую фигуру, а целое непрерывное семейство фигур, удовлетворяющих одной и той же совокупности условий. Эта особенность, да еще в сочетании с наличием инструментов для измерения любых геометрических величин и способностью программы строить траектории движущихся объектов, открывает широчайшие возможности для самостоятельного исследования.

2.1. От наблюдения – к геометрическому открытию

Учеников вряд ли удивит, если при деформации треугольника лучи, построенные как биссектрисы его углов, останутся биссектрисами и новых, изменен-



Пример 1.1. Окружность 9 точек (стартовый файл на диске: modell-1.html)

ных углов – ведь именно так мы их и определили. Но вот точку пересечения биссектрис при этом мы не строили – она возникла «сама». И когда при всех деформациях исходного треугольника биссектрисы продолжают пересекаться в одной точке – это уже маленькое геометрическое открытие! И это открытие может перевернуть весь ход урока – от унылого изложения известных тысячелетиями фактов вы переходите к активному стимулированию творческого потенциала учеников, развиваете в них навык видеть, формулировать и понимать геометрические закономерности. Важно, что это увеличивает эмоциональную вовлеченность учащихся в процесс познания (и создания нового знания!), а заодно помогает и лучше запомнить изучаемый материал.

В наборе примеров задания этого типа представлены классической теоремой Наполеона (пример 2.1).

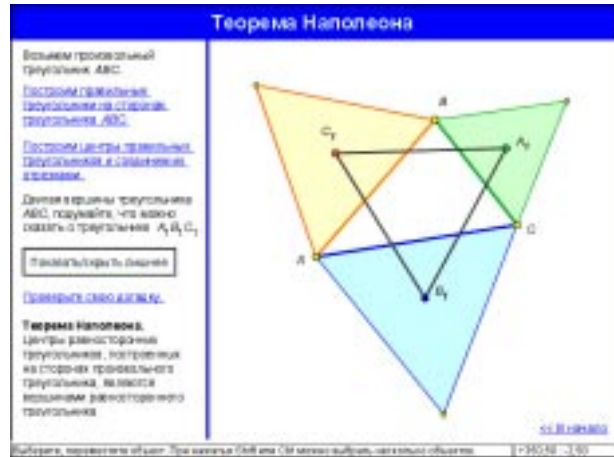
В этой связи стоит отметить, что в последние годы появление ИГС возродило интерес к элементарной геометрии и среди профессионалов. Благодаря компьютерным исследованиям, был открыт целый ряд новых теорем, появилась уникальная «Энциклопедия центров треугольника» К.Кимберлинга.

2.2. Численный эксперимент

В предыдущем пункте говорилось о наблюдениях за наглядными свойствами фигур при их вариации. Но в Математическом конструкторе можно измерить любые расстояния, углы и площади, а из результатов измерений можно составить произвольные выражения. Это позволяет проводить численные эксперименты и открывать (или переоткрывать) зависимости между элементами фигур (пример 2.2).

2.3. «Черный ящик»

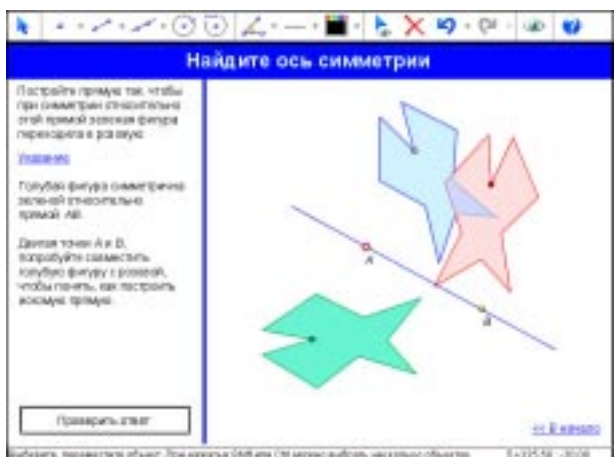
Интересны задания типа «черный ящик», в которых, наблюдая за изменениями одних элементов чертежа при перемещении других элементов, учащие-



Пример 2.1. Теорема Наполеона (стартовый файл на диске: model2-1.html)



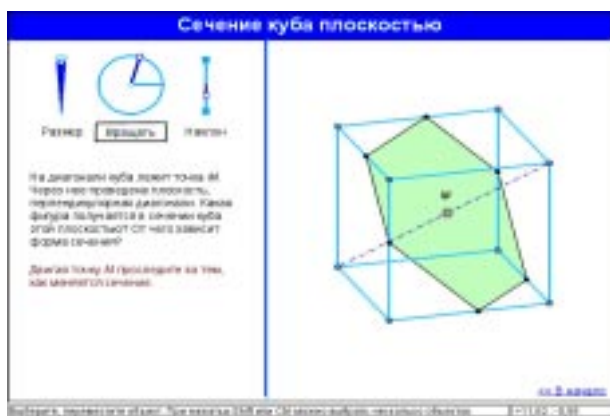
Пример 2.2. Сумма расстояний до сторон равностороннего треугольника (стартовый файл на диске: model2-2.html)



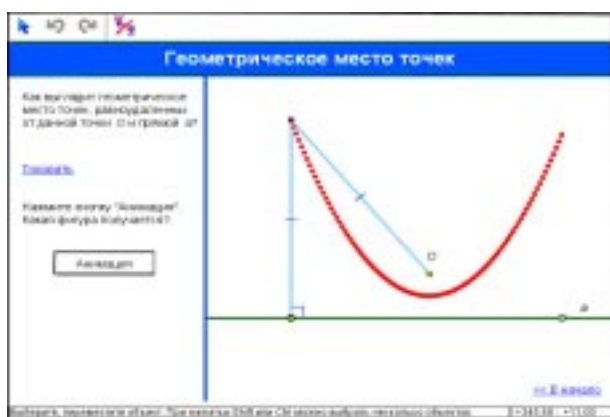
Пример 2.3. Найдите преобразование (стартовый файл на диске: model2-3.html)



Пример 2.4. Сечение тетраэдра (стартовый файл на диске: model2-4.html)



Пример 2.5. Сечение куба плоскостью (стартовый файл на диске: model2-5.html)



Пример 2.6. Парабола как GMT (стартовый файл на диске: model2-6.html)

ся должны разгадать скрытый связывающий их «механизм». В этих заданиях экспериментальная деятельность сочетается с конструктивной. Среди них встречаются как своего рода «геометрические головоломки», так и вполне содержательные вопросы. Например: дана фигура и ее образ при некотором движении, и требуется указать вид движения и его параметры (простейший вариант такого задания – пример 2.3).

2.4. Откуда посмотреть?

Развитие пространственного воображения – одна из важнейших целей при изучении стереометрии. Способствовать ее достижению призваны динамические стереометрические чертежи, в которых манипулирование компьютерной моделью предоставляет ученику качественно новые возможности. Нередко в стереометрической задаче достаточно взглянуть на пространственную конструкцию с нужной точки – и идея решения станет понятна без объяснений – см. пример 2.4.

2.5. Граничные значения

Другой тип геометрического эксперимента, который можно провести при помощи Математического конструктора, – исследование пограничных и крайних ситуаций. Пусть, например, ученики построили треугольник по трем сторонам. А затем стали менять длину исходных отрезков – и вдруг треугольник исчез. Так вы совершенно органично пришли к содержательной задаче о наличии и числе решений в зависимости от исходных данных. В примере 2.5 компьютер помогает исследовать переходы пространственной конструкции «в новое качество».

2.6. Геометрическое место точек

Специфически компьютерным является тип задач на построение и исследование геометрических мест точек, в которых используется функция рисования «следа» объекта, движущегося на экране (пример 2.6).

3. КОНСТРУКТИВНЫЕ ЗАДАНИЯ

3.1. Классические построения циркулем и линейкой

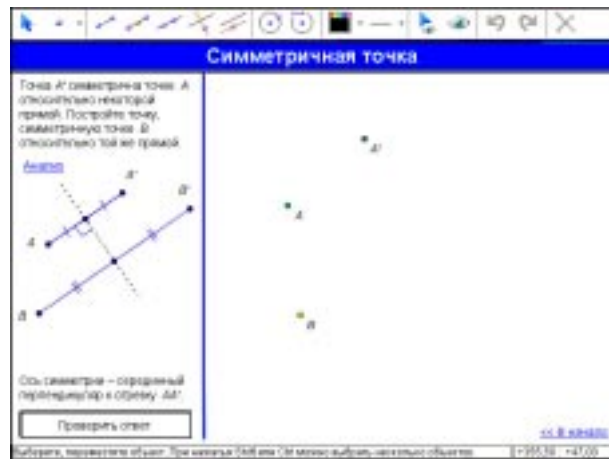
Важнейшим классом учебных заданий, формируемых при помощи Математического конструктора, являются задачи на построение с помощью виртуальных циркуля и линейки (пример 3.1). Любая «классическая» школьная задача на построение «циркулем и линейкой» может быть представлена в интерактивной компьютерной форме. Причем как на окончательном чертеже с ответом, так и во всех промежуточных фазах решения имеется возможность проверки правильности построения вариацией данных – когда кажущийся «правильным» чертеж рассыпается при деформировании исходных объектов, если он был создан лишь визуально похожим рисованием, а не геометрически корректным построением. Важным дополнением к построению служит и упомянутая выше возможность экспериментального исследования границ существования решений.

3.2. Построение нестандартным набором инструментов

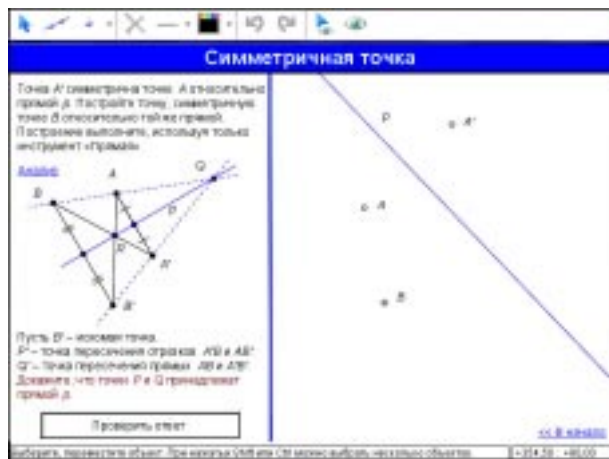
Важной особенностью Математического конструктора является возможность управления инструментарием заданий. Это позволяет упрощать интерфейс учебного модуля, не перегружая его ненужными в данной задаче инструментами. С другой стороны, у автора появляется возможность сделать из одной задачи несколько существенно различающихся по содержанию учебных заданий, изменяя набор инструментов, помещаемых на инструментальную панель (ср. примеры 3.1 и 3.2).

3.3. Построение на ограниченной области

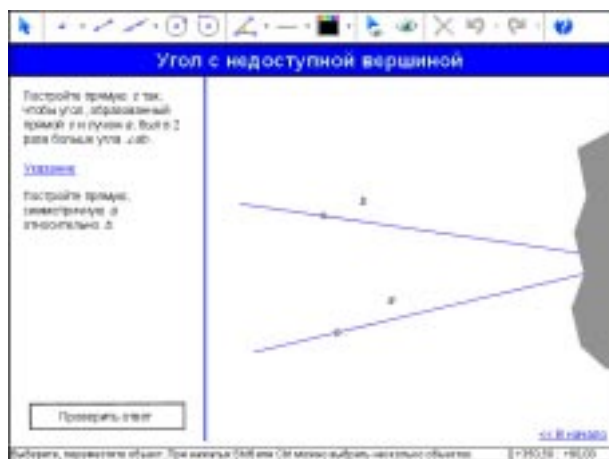
Интересной разновидностью задач на построение являются задачи, в которых ограничен доступ к тем или иным объектам (пример 3.3). Как и в случае с ограниченным набором инструментов, огра-



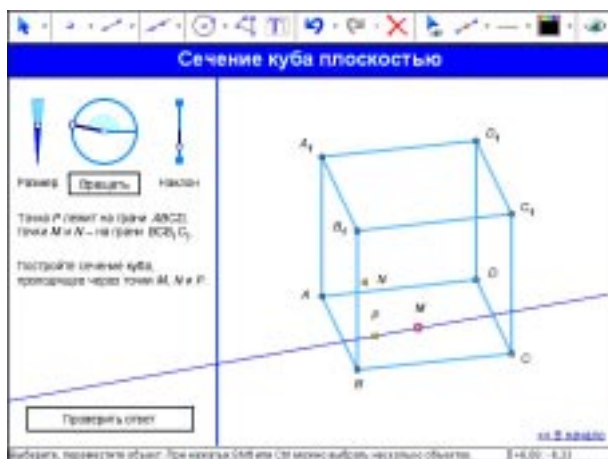
Пример 3.1. Построить симметричную точку (стартовый файл на диске: model3-1.html)



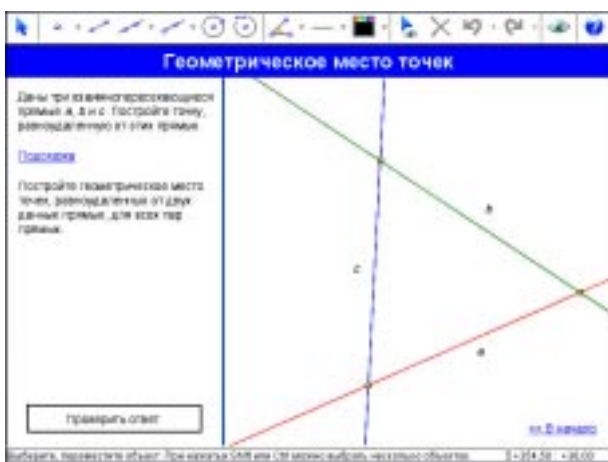
Пример 3.2. Построить симметричную точку только линейкой (стартовый файл на диске: model3-2.html)



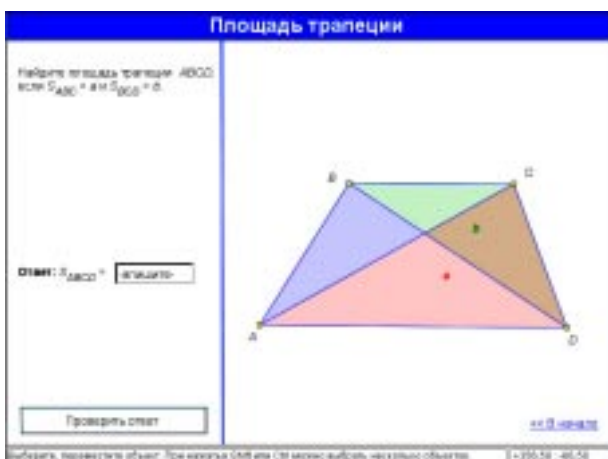
Пример 3.3. Угол с недоступной вершиной (стартовый файл на диске: model3-3.html)



Пример 3.4. Сечение куба
(стартовый файл на диске: model3-4.html)



Пример 4.1. Точки, равноудаленные
от трех прямых
(стартовый файл на диске: model4-1.html)



Пример 4.2. Найдите площадь трапеции
(стартовый файл на диске: model4-2.html)

ничение на использование объектов может превратить хорошо знакомую задачу в совершенно новую.

3.4. Построение на изображении пространственной фигуры

Построения в Математическом конструкторе можно проводить не только на планиметрических, но и на стереометрических чертежах, которые снабжаются механизмом изменения ракурса изображения (пример 3.4).

4. ЗАДАНИЯ С ПРОВЕРКОЙ ПОСТРОЕНИЯ ИЛИ ОТВЕТА

Мы выделили задания с автоматической проверкой в отдельную группу, поскольку эта возможность отсутствует в большинстве существующих ИГС, в том числе, в «Живой Математике». Это отсутствие объяснимо: программы динамической геометрии задумывались как открытые среды, рассчитанные прежде всего на проектный характер работы. Однако для наших традиций образования наличие достаточно развитой системы контроля представляется необходимым.

4.1. Проверка построения

Задачи на построение могут быть снабжены функцией автоматической проверки решения: если требуемая фигура имеется на чертеже, то при нажатии на соответствующую кнопку появляется сообщение о выполнении задания (см. пример 4.1). Текст этого сообщения, а также реакции на неверные или неполные ответы определяется автором. Результат проверки может передаваться и в программную оболочку, формирующую оценку.

4.2. Проверка заполнения символьной/текстовой строки

Математический конструктор позволяет проверять не только геометрические построения, но и правильность введенного числового ответа, текстовую строку и другие формы ответов (пример 4.2).

Имеется редактор для ввода и проверки сложных математических выражений.

5. СЦЕНАРНЫЕ ПРЕЗЕНТАЦИИ И ТРЕНАЖЕРЫ

Математический конструктор предоставляет ряд средств для реализации пошаговых сценариев работы с заданиями. Собственно, эти средства используются и в рассмотренных выше примерах. К ним относятся возможность создания кнопок показа и скрытия объектов, передвижения к заданному положению, анимации, создания цепочек кнопок, а также форматированного текста с формулами. Приведем два типичных примера применения этих средств.

5.1. Визуальная подсказка

На динамическом чертеже с визуальными подсказками часть информации, играющая роль подсказки, поначалу скрыта. Доступ к подсказке может быть как прямым (вызов ссылкой-кнопкой), так и требовать от пользователя предварительного выполнения каких-либо действий (например, ответа на вопрос). Подсказкой может быть дополнительное построение, значение какой-то величины, анимированное преобразование фигуры и т.д. Важно, что подсказки носят невербальный характер и тем самым развивают геометрическое воображение, интуицию, умение воспринимать информацию в разных формах. В качестве примера рассматривается задача о построении треугольника по двум сторонам и медиане (пример 5.1).

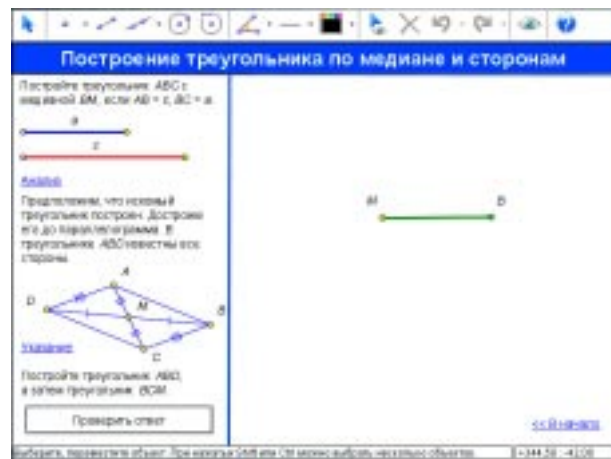
5.2. Построение шаг за шагом

При помощи Математического конструктора можно создавать пошаговые демонстрации объяснений, рассуждений, построений (презентации). На таких чертежах, как правило, имеется краткий текст, описывающий по шагам ход доказательства, построения или вычисления и содержащий гиперссылки, управляющие показом. При этом пользователь может (или даже должен) производить с чертежом некоторые действия.

Чертежи этого типа служат заменой фрагментам учебника и особенно полезны при самоподготовке. В приводимом для иллюстрации примере 5.2 излагается решение задачи из примера 5.1.

ОСОБЕННОСТИ СРЕДЫ «1С:МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КОНСТРУКТОР»

В предыдущем разделе говорилось, в основном, о тех возможностях Математического конструктора, которые присущи всем программам этого типа. Здесь же речь пойдет о специфике именно этой програм-



Пример 5.1. Построение треугольника по медиане и сторонам (задание)
(стартовый файл на диске: model5-1.html)



Пример 5.2. Построение треугольника по медиане и сторонам (решение)
(стартовый файл на диске: model5-2.html)

мы (прежде всего, по сравнению с наиболее популярной в России «Живой математикой»). Следует сказать, что многие из этих особенностей будут интересны, в основном, тем, кто знаком с разработкой динамических чертежей не понаслышке.

В первую очередь, отметим, что в качестве программной платформы для создания Математического конструктора была выбрана среда Java компании Sun Microsystems. Одним из основных ее достоинств является открытость: структура и принципы работы виртуальной машины описаны в открытых спецификациях. Изначальное позиционирование Java как платформы для создания интернет-приложений привело к тому, что вопросы безопасности и надежности с самого начала были одним из основных приоритетов. Возможность ограничивать потенциально опасную функциональность приложений – одна из важных возможностей Java. Помимо этого Java-приложения можно оформлять в виде апплетов, встраиваемых в веб-страницы. Модули расширения, позволяющие просматривать веб-страницы с апплетами, имеются для всех существующих браузеров. Это дает уникальную возможность публиковать построения в сети интернет в виде Java-апплетов прямо в теле веб-страницы. Апплеты могут наследовать весь функционал основной программы (за исключением возможности сохранения выполненных построений), причем набор доступных инструментов регулируется (см.



пример 3.2). Такие возможности, во-первых, позволяют создавать модели для задач, где требуется выполнить построение неполным комплектом чертежных инструментов, а во-вторых, позволяют начинающим пользователям работать с упрощенной панелью инструментов. Весьма важно, что апплеты распространяются бесплатно и требуют для своей работы только браузера и виртуальной Java-машины.

Поскольку Java-апплеты могут взаимодействовать со страницей, мы имеем простую возможность связывать апплеты с иными приложениями, встроенными в ту же страницу. Таким образом, например, реализовано взаимодействие со SCORM системами. Еще одна особенность Java – кросс-платформенность. Виртуальные машины Java существуют для всех распространенных платформ – Windows, Linux, MacOS.

Математический конструктор имеет встроенный скриптовый язык программирования, в качестве которого выбран ECMAScript (или JavaScript). Достоинством его является открытость и стандартизованность. Этот язык часто используется в качестве внутреннего скриптового языка в различных приложениях – от веб-браузеров до систем управления контентом – и поэтому с большой вероятностью даже далекие от программирования пользователи хотя бы поверхностно знакомы с ним.

Редактор скриптов Математического конструктора предоставляет широкие возможности для создания и последующего форматирования пользовательских скриптов. Важной для разработчиков особенностью является то, что кнопки в МК не несут какой-то закрепленной функциональности: созданная однажды управляющая кнопка может впоследствии быть многократно отредактирована и способна сочетать в себе весь скриптовый функционал, что позволяет при помощи несложных сочетаний простых функций создавать интересные комбинированные скрипты.

Отдельного упоминания заслуживает возможность проверки построения и символического ответа. При этом можно проверить не только появление в результате про-

изведенного построения фигуры, совпадающей с заранее построенным скрытым образцом (именно так организована проверка в некоторых существующих программах), но и выполнение требуемых соотношений между элементами построенной фигуры (например, равен ли периметр построенного треугольника длине данного отрезка). Проверка символьных ответов позволяет задавать несколько возможных вариантов правильного ответа. Таким образом, возможно создание сайтов с комплектами автоматически проверяемых заданий, что создает новые перспективы для дистанционного обучения.

Тот же редактор скриптов позволяет не ограничиваться при создании выражений и вычислений простыми комбинациями элементарных функций.

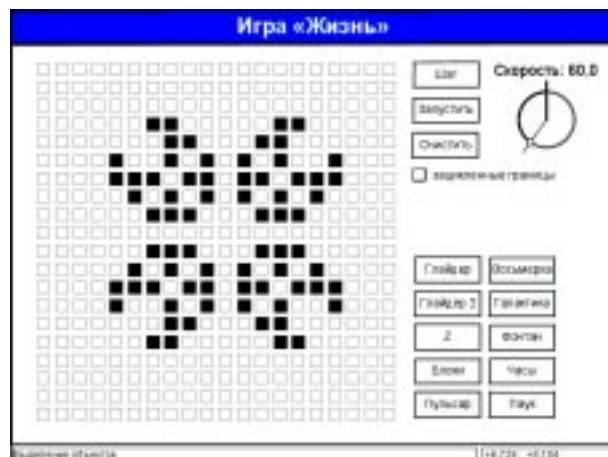
Скрипты хорошо иллюстрируют присутствующий принцип МК «ни порога, ни потолка», который в данном случае означает, что даже начинающий пользователь может легко создать элементарную кнопку-скрипт при помощи стандартных инструментов, а для профессионального разработчика редактор скриптов дает неограниченные возможности для творчества. Например, для включения самой простой проверки построения нужно выполнить всего три шага: 1) выделить объект-образец, представляющий ответ, 2) выполнить команду «Кнопка Проверить ответ» из меню *Кнопки*, 3) спрятать образец инструментом *Скрыть/показать*. В результате появится кнопка, по нажатию на которую будет проверяться наличие фигуры, совпадающей с образцом. Такую стандартную кнопку можно оставить как есть, но можно и изменить ее поведение – заменить стандартные тексты реакций, добавить дополнительные условия, а в более сложном варианте и запрограммировать самые замысловатые проверки.

Благодаря встроенному скриптовому языку, функционал создаваемых моделей допускает расширение далеко за рамки геометрических конструктивных задач. Примером такого расширения служит модель известной игры «Жизнь»

выдающегося математика Дж. Конвея (пример 6.1).

Подробному анализу был подвергнут состав основной панели инструментов, куда включены такие инструменты, как построение различных многоугольников, деление отрезка и угла на несколько равных частей и др. В то же время, традиционные инструменты также получили новое представление. Так, однажды выполненное преобразование (перенос, поворот, гомотетия, осевая симметрия) становится самостоятельным объектом, который можно редактировать (например, изменять центр и угол поворота) и повторно применять к другим фигурам. Традиционной для подобных сред является возможность создания пользовательских инструментов-макросов.

Особое внимание при разработке МК было уделено созданию средств оформления и правки моделей, учитывающих опыт работы создателей МК с другими ИГС. Отметим возможность варьировать форму и размер точек и стиль линий, инструменты для разметки отрезков штрихами и углов дужками, проведения вертикальных и горизонтальных линий, «укорачивания» прямых, при котором прямая изображается отрезком переменной длины, содержащим все построенные явным образом в данной конструкции точки этой прямой (например, все точки ее пересечения с другими прямыми). Имеется возможность переопределения «родителей» любых объектов модели (напри-



Пример 6.1. Игра «Жизнь»
(стартовый файл на диске: model6-1.html)

мер, точек, через которые проведена прямая, набора объектов, которые появляются при нажатии кнопки *Показать*, параметров преобразований).

В концепцию Математического конструктора заложены новые интерфейсные решения, рожденные практикой применения динамических чертежей, которые должны сделать работу с МК и динамическими моделями интуитивно понятной, простой и удобной. В первую очередь это:

– использование гиперссылок в текстах на чертежах, в том числе в качестве управляющих изображением «кнопок»;

– возможность запрета выделения и/или перемещения заданных объектов в апплете;

– использование набора динамических курсоров, зависящих не только от выбранного инструмента, но и от фазы построения, то есть выполняющих роль контекстной подсказки.

Наконец, следует отметить, что параллельно с разработкой и совершенствованием конструктивной среды идет разработка большой коллекции динамических моделей

в формате МК, ориентированных непосредственно на применение в современной российской школе. В частности, заканчивается подготовка в рамках проекта ИСО комплекта цифровых образовательных ресурсов к учебнику геометрии Л.С. Атанасяна и др., наиболее распространенному в настоящее время, а также информационный источник сложной структуры (по классификации проекта ИСО) «Конструктивные задания по геометрии». Это позволяет надеяться на то, что такой актуальный вид электронных обучающих материалов, как динамические чертежи, уже в самое ближайшее время найдет достойное и широкое применение в преподавании математики в нашей стране.

Программу «1С:Математический конструктор 2.0» можно приобрести в сети магазинов 1С:Мультимедиа и у официальных дистрибьюторов фирмы 1С. Более подробно ознакомиться с программой и обсудить ее функциональные и методические особенности можно на сайте <http://obr.1c.ru/mathkit>.



*Дубровский Владимир Натанович,
кандидат физико-математических
наук, доцент кафедры математики
СУНЦ МГУ им. М.В. Ломоносова,*

*Лебедева Наталья Анатольевна,
младший научный сотрудник НИИ
Механики МГУ им. М.В. Ломоносова,*

*Белайчук Олег Анатольевич,
ведущий методист-проектировщик
Образовательного отдела фирмы 1С.*