Андреев Николай Николаевич,
Зёрнышкина Елена Александровна,
Панюнин Никита Михайлович,
Калиниченко Михаил Александрович

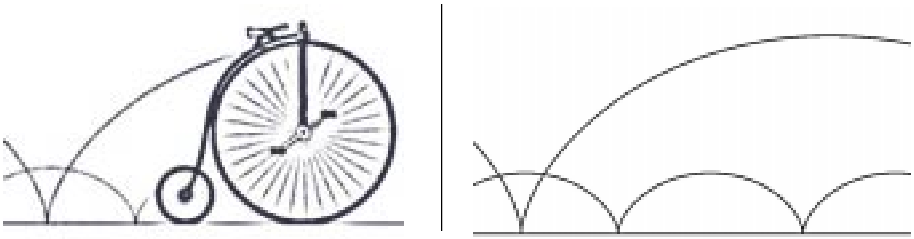
КОМПЬЮТЕРНЫЕ ФИЛЬМЫ О ЗАНИМАТЕЛЬНЫХ И НЕРЕШЕННЫХ ПРОБЛЕМАХ МАТЕМАТИКИ

ФИЛЬМ ВОСЬМОЙ. ЦИКЛОИДА

Кадр. 1–8. **Вступление.**

Помните оранжевые пластмассовые катафоты – светоотражатели, прикрепляющиеся к спицам велосипедного колеса? Прикрепим катафот к самому ободу колеса и проследим за его траекторией. Полученные кривые принадлежат семейству *циклоид*.

Колесо при этом называется *производящим кругом* (или окружностью) циклоиды.

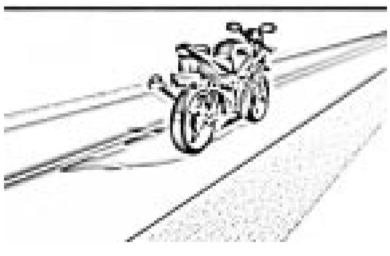


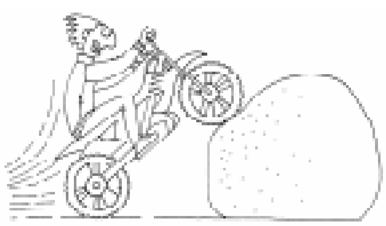
Кадр 9. **Заголовок.**

ЦИКЛОИДА

Кадр 10–20.

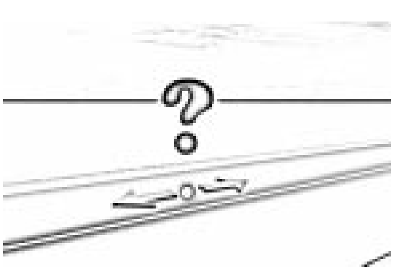
Но давайте вернемся в наш век и пересядем на более современную технику. На пути байка попался камушек, который застрял в протекторе колеса. Провернувшись несколько кругов с колесом, куда полетит камень, когда выскочит из протектора?





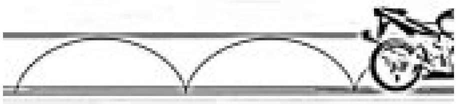
Кадр 21–23.

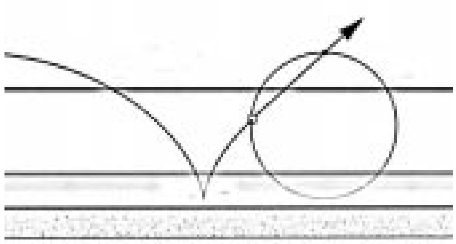
Против направления движения мотоцикла или по направлению?



Кадр 24–28.

Как известно, свободное движение тела начинается по касательной к той траектории, по которой оно двигалось. Касательная к циклоиде всегда направлена по направлению движения и проходит через верхнюю точку производящей окружности. По направлению движения полетит и наш камушек.

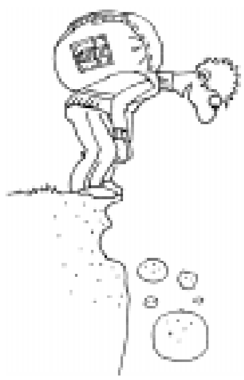




Вы спросите, а как же камни, отлетающие в лобовое стекло идущей сзади машины? Это те, которые на самом деле не крутились с колесом, а были сразу выброшены из под него.

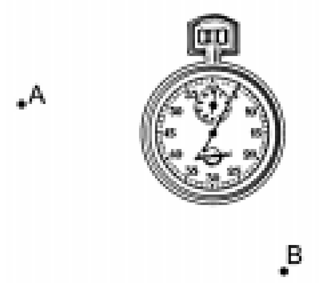
Помните, как Вы катались в детстве по лужам на велосипеде без заднего крыла? Мокрая полоска на вашей спине является житейским подтверждением только что полученного результата.

Кадр 29–39.



Век XVII – это век циклоиды. Лучшие ученые изучали ее удивительные свойства.

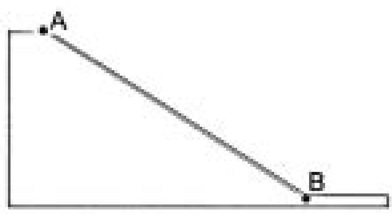
Какая траектория приведет тело, движущееся под действием силы тяжести, из одной точки в другую за кратчайшее время? Это была одна из первых задач той науки, которая сейчас носит название вариационное исчисление.



Минимизировать (или максимизировать) можно разные вещи – длину пути, скорость, время. В задаче о брахистохроне минимизируется именно время (что подчеркивается самим названием: *брахи* – наименьшее, *хрона* – время, греческий).

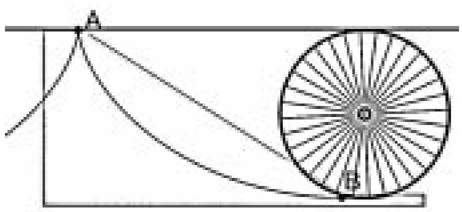
Кадр 40.

Первое что приходит на ум – это прямолинейная траектория.



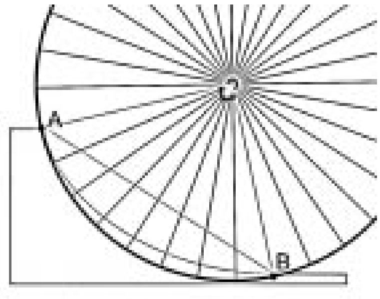
Кадр 41–45.

Давайте также рассмотрим перевернутую циклоиду с точкой возврата в верхней из заданных точек.



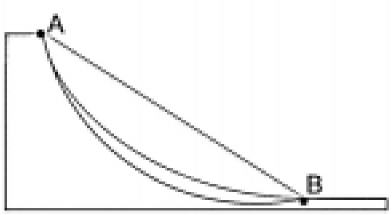
Кадр 46–48.

И, следуя за Галилео Галилеем, – четвертинку окружности, соединяющую наши точки.



Кадр 49.

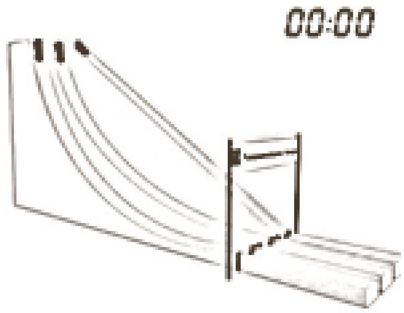
Сделаем бобслейные трассы с рассмотренными профилями и проследим, какой из бобов приедет первым.



История бобслея берет свое начало в Швейцарии. В 1924 году, во французском городе Шамони, проходят Первые зимние Олимпийские игры. На них уже проводятся соревнования по бобслею для экипажей двоек и четверок. Единственный год, когда на Олимпийских играх экипаж боба состоял из 5 человек, был 1928. С тех пор в бобслее всегда соревнуются мужские экипажи двойки и четверки. В правилах бобслея много интересного. Конечно же, существует ограничения на вес боба и команды, но существуют даже ограничения на материалы, которые можно использовать в коньках боба (передняя пара их подвижна и связана с рулем, задняя закреплена жестко). Например, радий не может использоваться при изготовлении коньков.

Кадр 50–60.

Дадим старт нашим четверкам. Какой же боб первым приедет к финишу? Боб зеленого цвета, выступающий за команду Математических этюдов и катившийся по циклоидальной горке приходит первым!



Почему же Галилео Галилей рассматривал четвертинку окружности и считал что это наилучшая в смысле времени траектория спуска? Он вписывал в нее ломанные и заметил, что при увеличении числа звеньев время спуска уменьшается. Отсюда Галилей естественным образом перешел к окружности, но сделал неверный вывод, что эта траектория наилучшая среди всех возможных. Как мы видели, наилучшей траекторией является циклоида.

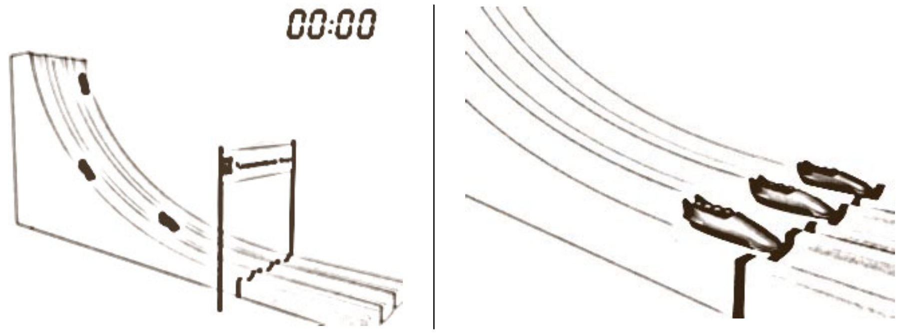
Через две данные точки можно провести единственную циклоиду с условием, что в верхней точке находится точка возврата циклоиды. И даже когда циклоиде приходится подниматься, чтобы пройти через вторую точку, она все равно будет кривой наискорейшего спуска!

Кадр 61–63.

Еще одна красивая задача, связанная с циклоидой – задача о таутохроне. В переводе с греческого *тауто* означает одинаковое, *хронос* – как мы уже знаем, время.

Кадр 64–70.

Сделаем три одинаковые горки с профилем в виде циклоиды, так, чтобы конец горки приходился в вершину циклоиды. Поставим три боба на разные высоты и дадим отмашку. Удивительнейший факт – все бобы приедут вниз одновременно!



Зимой Вы можете построить во дворе горку изо льда и проверить это свойство вживую.

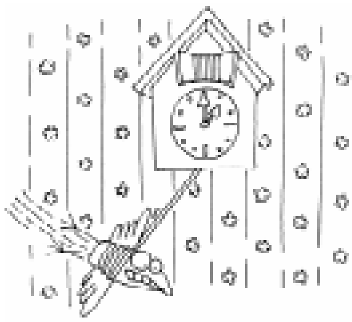
Задача о таутохроне состоит в нахождении такой кривой, что, начиная с любого начального положения, время спуска в заданную точку будет одинаковым.

Христиан Гюйгенс доказал, что единственной таутохроной является циклоида.

Конечно же, Гюйгенса не интересовал спуск по ледяным горкам. В то время ученые не имели такой роскоши заниматься науками из любви к искусству. Задачи, которые изучались, исходили из жизни и запросов техники того времени. В XVII веке совершаются уже дальние морские плавания. Но удивительно, что широту моряки умели определять уже достаточно точно, а вот долготу не умели определять совсем. И один из предлагавшихся способов измерения широты был основан на наличие точных хронометров.

Кадр 71–74.

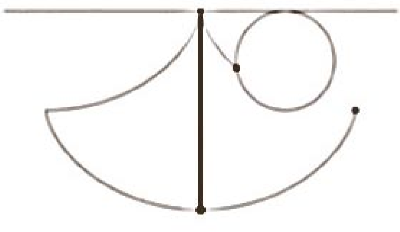
Первый, кто задумал делать маятниковые часы, которые были бы точны, был Галилео Галилей. Однако в тот момент, когда он начинает их реализовывать, он уже стар, он слеп, и за оставшийся год своей жизни он не успевает сделать часы. Он завещает это сыну, однако тот медлит и начинает заниматься маятником тоже лишь перед смертью и не успевает сделать. Следующей знаковой фигурой был Христиан Гюйгенс.

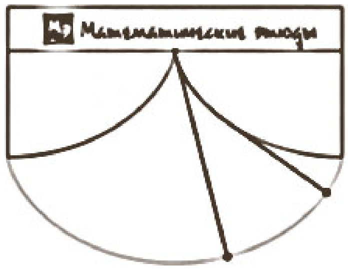


Он заметил, что период колебания обычного маятника, рассматривавшегося Галилеем, зависит от изначального положения, то есть от амплитуды. Задумавшись о том, какова должна быть траектория движения груза, чтобы время качения по ней не зависело от амплитуды, он решает задачу о таутохроне.

Кадр 75–90.

Но как заставить груз двигаться по циклоиде? Переводя теоретические исследования в практическую плоскость, Гюйгенс делает «щечки», на которые наматывается веревка маятника, и решает еще несколько математических задач. Он доказывает, что «щечки» должны иметь профиль той же самой циклоиды, тем самым показывая, что эволютой циклоиды является циклоида с теми же параметрами.





Кроме того, предложенная Гюйгенсом конструкция циклоидального маятника позволяет посчитать длину циклоиды. Если синюю ниточку, длина которой равна четырем радиусам производящего круга, максимально отклонить, то ее конец будет в точке пересечения «щечки» и циклоиды-траектории, то есть в вершине циклоиды – «щечки». Так как это половина длины арки циклоиды, то полная длина равна восьми радиусам производящего круга.

Христиан Гюйгенс сделал циклоидальные маятник и часы с ним проходили испытания в морских путешествиях, но не прижились. Впрочем, так же как и часы с обычным маятником для этих целей.

Отчего же, однако, до сих пор существуют часовые механизмы с обыкновенным маятником? Если приглядеться, то при малых отклонениях, как у красного маятника, «щечки» циклоидального маятника почти не оказывают влияния. Соответственно движение по циклоиде и по окружности при малых отклонениях почти совпадают.

***Кадр 91.* Титры**

Идея фильма: Николай Андреев, Елена Зёрнышкина, Никита Панюнин.

Мультипликация: Михаил Калиниченко.

Андреев Николай Николаевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник Математического института им. В.А. Стеклова РАН,

Зёрнышкина Елена Александровна, старший преподаватель, кафедра высшей математики ОТИ МИФИ,

Панюнин Никита Михайлович, младший научный сотрудник, НИИ Системных исследований,

Калиниченко Михаил Александрович, художник проекта.