Иванов Сергей Георгиевич

УЗЛЫ ТРИВИАЛЬНЫЕ И НЕТРИВИАЛЬНЫЕ

От редакции: статья посвящена обсуждению задачи «Узелок на память» конкурса КИО-2007 и построена на обзоре статьи О.Я. Виро «Раскрашенные узлы» (журнал «Квант», № 3, 1981) и книги А.Б. Сосинского «Узлы и косы» (МЦНМО, 2001).

Занимаясь каким-нибудь предметом из реальной жизни, математики обычно заменяют его подходящим абстрактным объектом. Например, веревочный узел был превращен в узел математический.

Одним из вопросов, побудивших математиков заняться узлами, был вопрос о том, какие узлы можно развязать, не порвав, а какие нельзя. С этой задачей связывают знаменитое выражение «разрубить Гордиев узел», но непонятно, что все-таки разрубил Александр Македонский – запутанный узел, неразвязываемый узел с вмонтированными в колесницу концами, или узел-головоломку, который можно было развязать остроумным, нестандартным приемом.

Здесь отметим различие между веревочным и математическим узлом: у веревки, завязанной узлом, есть концы. Но веревку развязать можно всегда, протаскивая один ее конец поочередно через петли узла. Для того, чтобы задача о развязывании узла стала нетривиальной, следует избавиться от концов веревки – например, закрепив их или соединив друг с другом (рис. 1).

Для того, чтобы исключить совсем экзотические конструкции (например, узлы с бесконечным количеством петель, как на рис. 2), примем следующее

Определение. *Полигональным* узлом называется замкнутая связная не имеющая точек самопересечения пространственная ломаная, составленная из конечного числа прямолинейных отрезков.

Если в этом определении пренебречь связностью, то получится определение *полигонального зацепления.*

На рис. 3 изображены полигональные узлы, а на рис. 4 – полигональные зацепления, не являющиеся узлами.

Поскольку далее в статье будем рассматривать только полигональные узлы и зацепления, слово «полигональный» будет для краткости опускаться.

КАК НАРИСОВАТЬ УЗЕЛ

При изображении узла выбирают такую точку, чтобы

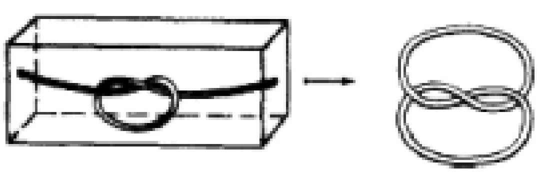


Рис. 1

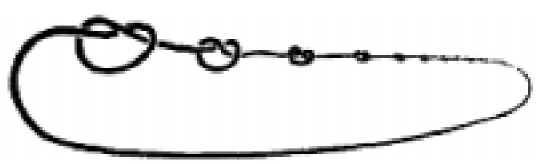
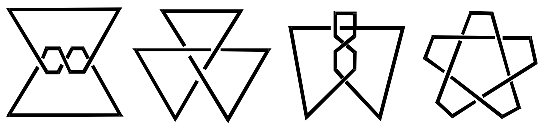
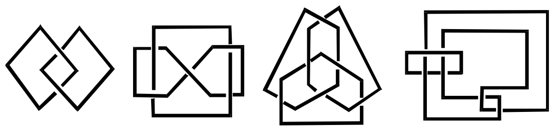


Рис. 2



а) б) в) г)

Рис. 3



а) б) в) г)

Рис. 4

1) узел целиком лежал в одной полуплоскости относительно некоторой плоскости, проходящей через данную точку,

2) чтобы никакие три звена не казались проходящими через одну точку.

Выполнения первого условия можно достичь, отодвинув точку достаточно далеко от узла. Для выполнения второго условия, если оно еще не выполнено, достаточно немного «пошевелить» точку.

Если изображения двух звеньев узла пересекаются, необходимо указать, какое из них дальнее, а какое ближнее. Для этого дальнее звено прерывают, как это сделано на рис. 3 и 4.

Изображение узла, полученное с выполнением этих правил, называют *диаграммой узла*.

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБ ОДИНАКОВО ЗАУЗЛЕННЫХ УЗЛАХ

Веревочные кольца, которые получаются друг из друга непрерывными преобразованиями, логично называть одинаково заузленными.

Для полигональных узлов и зацеплений понятие одинаковой заузленности превращается в понятие *изотопности.*

Два узла (соответственно, два зацепления) называют *изотопными*, если от одного к другому можно перейти с помощью *элементарных изотопий*. Элементарная изотопия – это замена одного звена узла (зацепления) двумя новыми отрезками, которые вместе с ним образуют контур треугольника, пересекающегося с прежним узлом только по замененному звену, или обратная операция – замена двух смежных звеньев одним отрезком, который вместе с ними образует контур треугольника, пересекающегося с прежним узлом только по замененным звеньям. На рис. 5 показаны два узла, отличающиеся друг от друга только элементарной изотопией.

Узел, изотопный контуру треугольника, называют *тривиальным.*

Узлы, изображенные на рис. 5, тривиальны (последовательность элементарных изотопий, соединяющих их с треугольником, показана на рис. 6).

Тривиальные узлы могут быть весьма замысловатыми.

Упражнение 1.

Докажите изотопность узлов на рис. 3*а* и 3*б*.

Упражнение 2.

Докажите тривиальность узлов на рис. 7.

...какие узлы можно развязать, не порвав, а какие нельзя.

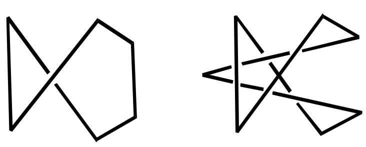


Рис. 5

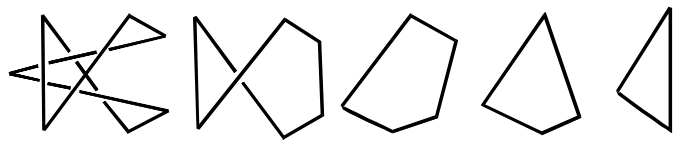
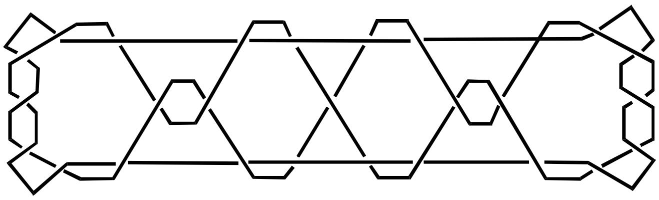
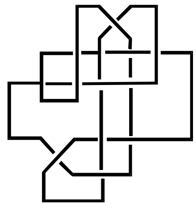


Рис. 6



а)



б)

Рис. 7

КАК ДОКАЗЫВАТЬ НЕИЗОТОПНОСТЬ УЗЛОВ

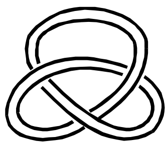
Определение изотопности ставит проблему: существуют ли неизотопные узлы? И частный случай этой проблемы: существуют ли узлы, неизотопные тривиальному?

Мы знаем, что сложные на вид узлы могут оказаться тривиальными (см. упражнение 2). С другой стороны, если мы попытаемся развязать веревочное кольцо на рис. 8 *а*, то поймем, что это невозможно. Но как доказать соответствующее математическое рассуждение? Как доказать нетривиальность узла на рис. 8 *б*? (Этот узел называют *трилистником*.)

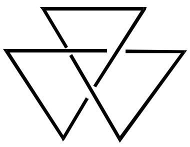
Нетривиальность узла – это невозможность превращения его в тривиальный узел при помощи элементарных изотопий. Для доказательства невозможности превращения одного математического объекта в другой путем преобразований часто используют некоторый *инвариант* (от латинского слова «неизменный») – свойство, которое сохраняется в процессе преобразований, и которым обладает первоначальный объект и не обладает объект, полученный в результате преобразований.

Свойство узла, сохраняющееся при элементарных изотопиях, называют *инвариантным свойством* или просто *инвариантом* узла. В теории узлов изучают главным образом их инвариантные свойства. Примером инвариантного свойства может служить тривиальность. Можно придумать много других инвариантных свойств узла – например, наименьшее из чисел звеньев и наименьшее из чисел скрещиваний в диаграммах изотопных ему узлов. Но проверка таких инвариантов по диаграмме – сложная задача.

При доказательстве нетривиальности узла может помочь легко вычислимый инвариант, определяющийся непосредственно по диаграмме узла.



а)



б)

Рис. 8

ПОСТРОЕНИЕ ИНВАРИАНТА

Диаграмма узла состоит из нескольких непересекающихся ломаных, поскольку некоторые звенья на диаграмме прерываются. Эти ломаные будем называть участками диаграммы.

Для доказательства неизотопности узлов полезно раскрашивать их диаграммы, соблюдая некоторые правила.

Раскраску диаграммы узла в три цвета будем называть правильной, если

1) каждый ее участок раскрашен в один цвет,

2) вблизи каждой точки скрещивания либо все три участка раскрашены в один цвет, либо встречаются все три цвета.

Для доказательства неизотопности узлов полезно раскрашивать их диаграммы...

Упражнение 3.

Докажите, что диаграммы узлов, изображенные на рис. 6 и 7, нельзя правильно раскрасить, использовав все три цвета (то есть правильная раскраска узлов может быть только одноцветной).

Упражнение 4.

Докажите, что количество правильных раскрасок диаграммы трилистника (рис. 8 *б*) равно 9.

Теорема 1 (основная теорема о трехцветных раскрасках). *Количество правильных раскрасок диаграммы узла в три цвета является инвариантом узла.*

Следствие 1. Если диаграмма допускает правильную раскраску, в которой участвуют все три цвета, то узел нетривиален.

Это следствие позволяет доказать нетривиальность трилистника и многих других узлов.

Теорема 1 дает возможность доказать неизотопность узлов во многих случаях, но не дает универсального способа доказательства. Например, узлы, изображенные на рис. 3*а* и 3*б*, нетривиальны, но это невозможно доказать с помощью правильных трехцветных раскрашиваний.

Упражнение 5.

Постройте бесконечную последовательность узлов, у которых количества правильных трехцветных раскрасок диаграмм попарно различны (по теореме 1 каждые два узла этой серии неизотопны).

Теорема 1 вытекает из следующих двух теорем, доказательства которых не сложны, но достаточно громоздки. Прилежный читатель сможет найти их самостоятельно.

Теорема 2. *Всякую элементарную изотопию зацепления можно заменить конечной последовательностью элементарных изотопий, каждая из которых изменяет диаграмму зацепления одним из способов, изображенных на рис. 9.*

Например, элементарную изотопию, изображенную на рис. 10, можно заменить последовательностью элементарных изотопий, показанных на рис. 11 (цифрами указан порядок выполнения элементарных изотопий).

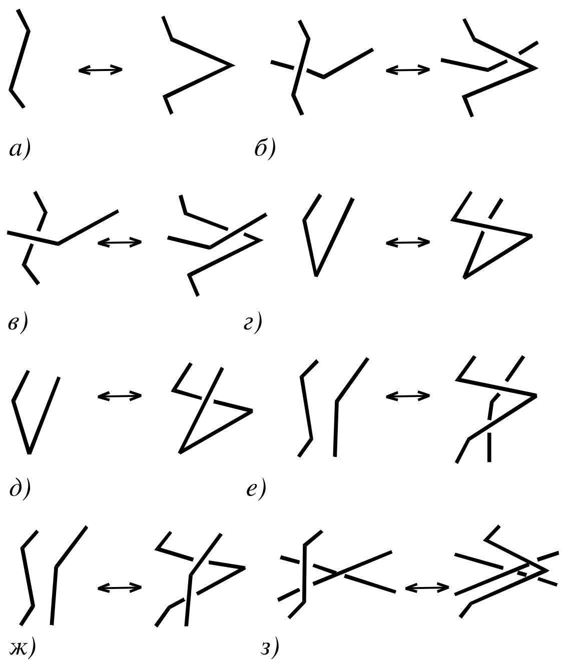


Рис. 9

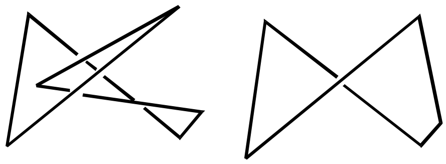


Рис. 10

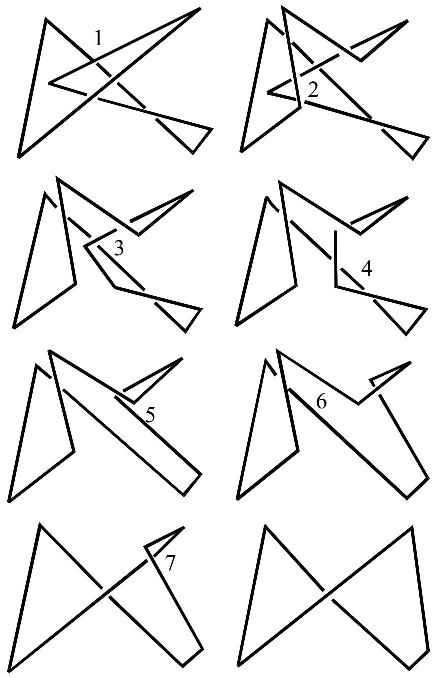


Рис. 11

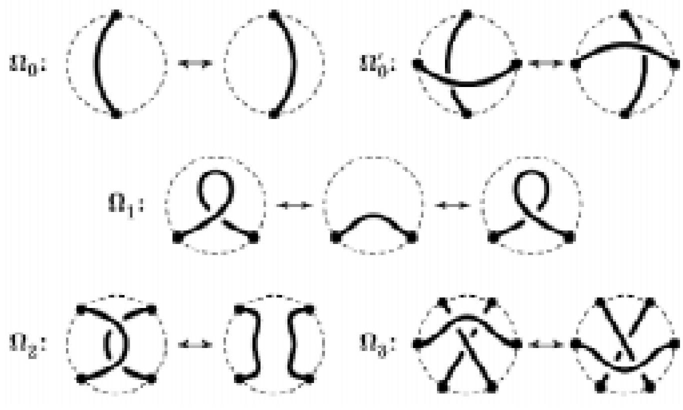


Рис. 12.

Теорема 3. *Между правильными трехцветными раскрасками диаграмм, получающихся друг из друга операциями, изображенными на рис. 9, существует взаимно однозначное соответствие, при котором в соответствующих раскрасках неизменяющиеся части диаграмм раскрашены одинаково.*

Примечание.

Опираясь на теорему 2, можно доказать инвариантность любого инварианта, определяемого по диаграмме. Попытайтесь придумать новый инвариант и доказать его инвариантность таким образом.

АЛГОРИТМ «РАЗВЯЗЫВАНИЯ» УЗЛА

Можно построить алгоритм, с помощью которого компьютерная программа «развязывает» «развязываемый» узел, то есть приводит его к тривиальному.

Первый шаг в решении этой задачи состоит в сведении пространственной задачи к более простой задаче применения простых операций к кривым на плоскости. Эти операции придумал в 1920-х годах немецкий математик Рейдемейстер (1893–1971), они изображены на рис. 12. Далее для наглядности в перебрасывании петель узла будем изображать узлы не в виде ломаных, а в виде кривых линий.

На рис. 13 приведен пример развязывания узла с помощью этих операций.

Оказывается, что любой тривиальный узел можно развязать с помощью таких операций. А именно, имеет место

Лемма Рейдемейстера. *Если узел тривиальный, то его плоскую диаграмму можно распутать на плоскости с помощью операций Рейдемейстера.*

АЛГОРИТМ ПОЛНОГО ПЕРЕБОРА С ЗАПОМИНАНИЕМ

Рассмотрим следующий алгоритм «развязывания» узла.

Диаграмма узла кодируется в виде строки из чисел (номеров перекрестков), букв В, Н (обозначающих проход сверху или снизу) и знаков +, – (обозначающих ориентацию перекрестков, рис. 14).

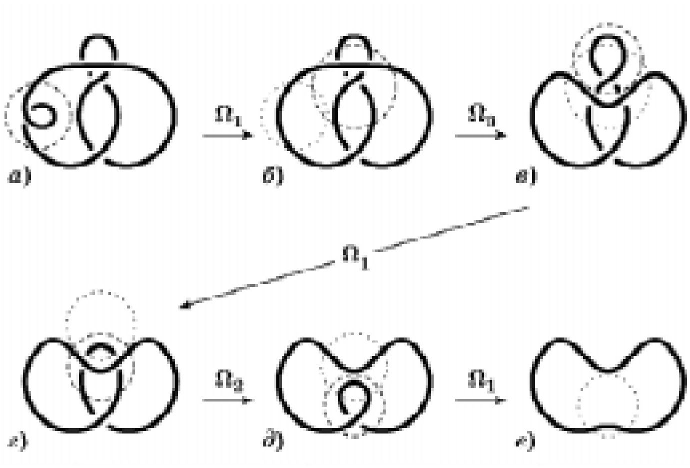


Рис. 13.

...алгоритм «развязывания» узла.

Например, узел на рисунке 13 *а* кодируется так: 1 (В +) 2 (В –) 3 (В –) 3 (Н –) 4 (В –) ... 1 (Н +) ...

Компьютер анализирует код диаграммы узла, находит *все возможные конфигурации*, к которым применимы операции, изображенные на рисунке 12, и выполняет их. Например, он находит петельку 3 (В –) 3 (Н –) и удаляет ее из кода.

Преобразование Ω_1: (В –) (Н –) переводится в пустую строку (петелька расправляется по механизму Ω_1).

(Н –) (В –)переводится в пустую строку (петелька расправляется по механизму Ω_1).

Преобразование Ω_2: (В +)(В –)(Н +)(Н –) переводится в пустую строку (наложение двух криволинейных участков расправляется по механизму Ω_2).

Преобразование Ω_2: (Н +)(Н –) (В +)(В –) переводится в пустую строку (наложение двух криволинейных участков расправляется по механизму Ω_2).

Преобразование Ω_3: (В+)(В–)(В+)(Н+) (Н–)(Н+) переводится в (В–) (В+) (Н+)(В+) (Н+)(Н–) (перенос криволинейного участка по механизму Ω_3).

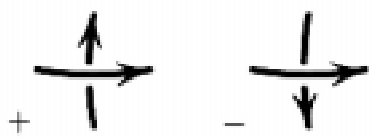


Рис. 14.

Преобразование Ω_3: (Н+)(Н–)(Н+)(В+) (В–)(В+) переводится в (Н–)(Н+) (В+)(Н+) (В+)(В–) (перенос криволинейного участка по механизму Ω_3).

Все полученные коды компьютер запоминает, далее каждый преобразует всеми возможными способами.

Если узел тривиальный, то наш переборный алгоритм (в силу леммы Рейдемейстера) рано или поздно получит «пустое слово» (все символы кода будут вычеркнуты).

Если узел нетривиальный, то пустое слово не получим никогда. Практически в этом случае надо ограничить количество шагов перебора, и если за такое количество шагов не удалось вычеркнуть все символы кода, то программа признает узел нетривиальным.

Иванов Сергей Георгиевич,
кандидат педагогических наук,
научный сотрудник лаборатории
продуктивного обучения
ИСМО РАО.