Романовский Иосиф Владимирович

ДЕМОНСТРАЦИОННЫЕ ПРОГРАММЫ: 1. РЕШЕТО ЭРАТОСФЕНА

Решето Эратосфена – замечательная конструкция, предназначенная для выделения простых чисел в каком-то начальном отрезке натурального ряда. Ее автор, грек Эратосфен родился в 276 г. до н. э. и умер в 196 г. до н. э.

Метод Эратосфена заключается в том, что выписываются все числа заданного отрезка, затем из них вычеркиваются все числа, делящиеся на 2. Первое из оставшихся, число 3, тоже простое. Вычеркиваются все числа, делящиеся на 3. И опять, первое из оставшихся, число 5, простое. Если мы работаем с отрезком чисел от 1 до N, нам достаточно вычеркнуть числа, делящиеся на простые числа, квадрат которых не превосходит N.

Естественно, что показать этот алгоритм в действии было очень увлекательно, и мы реализовали его в демонстрационных программах уже три раза, а сейчас я попросил изготовить уже третий вариант. Полезно посмотреть, чем они отличаются (на диске к журналу читатель найдет эти программы – *прим. ред.*).

1. ПРОСТЕЙШИЙ ВАРИАНТ

Первый вариант был разработан студенткой Полиной Вьюковой (П.Г. Черкасовой) в 1997 г. Это была одна из самых первых наших демонстраций. Программа запускается выбором **Старт** в главном меню и работает автоматически. На рис. 1 вы видите окно программы во время работы.

«Просеиваются» числа от 1 до 65, числа, делящиеся на 2 и 3, уже упали вниз, и отбираются числа, делящиеся на 5. Черточка под 25 уже стерлась, когда просмотр дойдет до конца, то это число (так же, как и 35, 55 и 65) провалятся вниз. В верхней строчке мы видим стрелку, указывающую на очередное простое число.

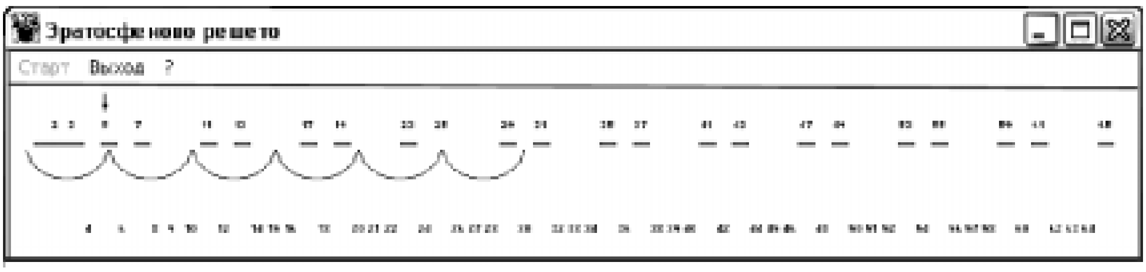

Рис. 1

Недостаток этой простой и наглядной программы в том, что демонстрация ограничивается очень коротким рядом чисел. Поэтому вскоре я сам написал следующий вариант, который в 2003 г. доделывал студент К. Лебедев.

2. ВАРИАНТ С БОЛЬШОЙ ТАБЛИЦЕЙ

В этом варианте $N = 10000$. Такой большой набор чисел мы разместить на экране не можем, и была сделана просто клетчатая доска, размером 100×100, ячейки которой раскрашиваются в разные цвета. Каждая ячейка соответствует одному числу. В первой строке этой таблице расположены числа от 0 до 99, затем от 100 до 199 и т. д. Ячейки чисел, у которых нашлись делители, выкрашены в черный цвет, у заведомо простых чисел – в фиолетовый, у использованных для вычеркивания – в красный. Остальным числам соответствует серый цвет.

На рис. 2 вы видите поле после опознания чисел, делящихся на 11. Простые числа, меньшие 121, уже распознаны, так что программа уже имеет все делители, которые нужно использовать в данной таблице.

По завершении просмотра получается красивая черно-фиолетовая таблица, в которой мы можем узнать число, соответствующее каждой клетке и его тип (см. рис. 3).

На саму ячейку указывает курсор, который при копировании экрана не сохраняется и был пририсован дополнительно.

Эта программа хорошо показывает эффективность этого старинного метода: мы просмотрели только простые числа первой строки, а получили ответ для такого большого набора чисел.

3. РЕШЕТО БЕЗ МАССИВА

Студентам этого года (2006/2007) я заказал уже третий вариант «решета». Собственно решета-то уже и нет, мы обходимся без массива, но изменять классическое название, конечно, нельзя – идея остается прежней.

Первоначальная идея заключается в том, что мы просматриваем все числа требуемого диапазона, и для каждого из них определяем, делится оно на простые делители из заданного множества или нет. Идею можно сразу же улучшить: можно брать только числа, не делящиеся на 2, это вдвое сократит работу. Или числа, которые при делении на 6 дают в остатке 1 или 5 – работа сократится втрое. Или числа, которые при делении на 30 дают в остатке 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, – сокращение почти в 4 раза. Можно взять и $210 = 30 \times 7$ – подсчитайте сами получающийся выигрыш.

Мы возьмем диапазон 30.

Чтобы прояснить подход, взглянем на часть расчета, выполненного в Excel (рис. 4). Начнем со второго столбца таблицы. В нем перечисляются просматриваемые программой числа (назовем их кандидатами). В первом столбце таблицы пишутся в циклическом порядке остатки от деления кандидатов на 30. Этот столбец задает исходные данные, остатки цикли-

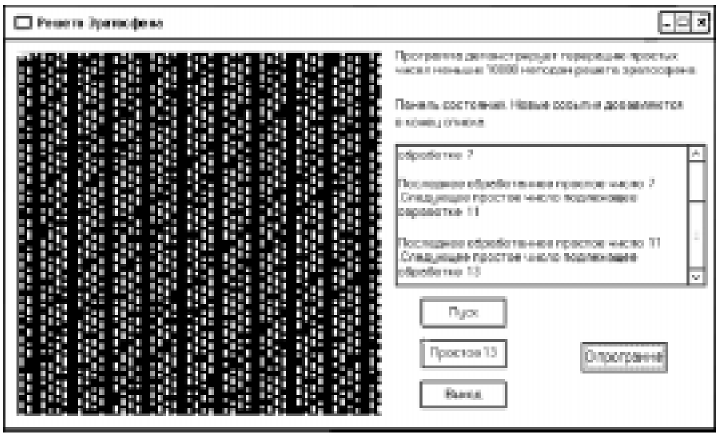

Рис. 2

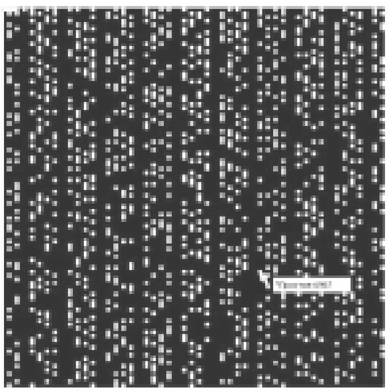

Рис. 3

A	B	C	D	E
gen	t	dt	7	11
29	29	6	1	
1	31	2	3	
7	37	6	2	
11	41	4	6	
13	43	2	1	
17	47	4	5	
19	49	2	0	**11**
23	53	4	4	9
29	59	6	3	4
1	61	2	5	6
7	67	6	4	1
11	71	4	1	5
13	73	2	3	7
17	77	4	0	0

Рис. 4

A	B	C	D	E	F	G	H
gen	t	dt	7	11	13	17	19
13	283	2	3	8	10	11	
17	287	4	0	1	1	15	
19	289	2	2	3	3	0	**19**
23	293	4	6	7	7	4	8
29	299	6	5	2	0	10	14
1	301	2	0	4	2	12	16
7	307	6	6	10	8	1	3
11	311	4	3	3	12	5	7
13	313	2	5	5	1	7	9
17	317	4	2	9	5	11	13
19	319	2	4	0	7	13	15

Рис. 5

чески повторяются. Начинаются они не от начальной 1, а от числа 29 – первого простого после $5^2 = 25$. До 25 все кандидаты автоматически являются простыми числами. А после этого порога нужно проверять, не делятся ли кандидаты на следующее простое, число 7. Это контрольное число помещается в четвертый столбец. Для первого числа остаток от деления на 7 вычисляется обычным образом.

В следующих строках он находится уже проще: мы прибавляем к старому остатку разность между двумя кандидатами, и если эта разность превосходит контрольное число, вычитаем его:

```
NewRem := OldRem + (NewCand-OldCand);
  if (NewRem >= Divisor)
  then Dec(NewRem,Divisor);
```

Для простоты в третьем столбце приводятся разности кандидатов, именно они, а не остатки из первого столбца должны участвовать в расчете. Если среди остатков окажется хотя бы один ноль, кандидат отвергается – это число не простое.

Когда кандидаты достигают квадрата последнего контрольного числа (сейчас это $49 = 7^2$), нужно расширить таблицу, добавив столбец со следующим простым числом. Вы видите, как добавился столбец с делителем 11.

Посмотрим на таблицу, когда происходит появление делителя 19, и несколько шагов с новым делителем (рис. 5). Мы видим, как просты вычисления при переходе от одного кандидата к другому.

Фактически в вычислениях участвуют, два массива – для контрольных чисел и для остатков от деления кандидатов на эти числа. Одно единственное умножение, которое еще остается в нашей схеме, связано с необходимостью сравнения очередного кандидата с квадратом последнего контрольного числа. Вопрос о том, как обойтись и здесь без умножения, мы оставим читателю.

Романовский Иосиф Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор СПбГУ.