*Пименов Револьт Револьтович*

# ЗАКОН ЦВЕТКА

*«О мир, пойми, певцом во сне открыты*
*Закон звезды и формула цветка.»*
*(М. Цветаева)*
*«Но ум мерит и символически, путем сравнения,*
*как тогда, когда он пользуется числом*
*и геометрическими фигурами*
*и ссылается на них как на подобия.»*
*(Н. Кузанский, цит. по «Игре в Бисер» Г. Гессе)*

Что общего между формами барокко, индусскими мандалами, китайскими «драконами», религиозным искусством христианства, иудаизма и ислама? Они красивы. Но не только это. Они основаны на геометрии окружности. Можно сказать и большее: геометрия окружности дает строгое основание для законов эстетики. Она показывает общее во многих, на первый взгляд, глубоко различных формах. Как рукотворных, так и природных.

В этой статье я расскажу об основных принципах геометрии окружности и о компьютерной программе DodecaLook, строящей на основе геометрии окружности удивительные движущиеся рисунки. Тем, кому интересна геометрия геометрия окружности и ее связь с другими разделами геометрии, я предлагаю прочитать серию статей на эту тему в интернете http://33.nm.ru/beregovo.doc, а по ссылке http://33.nm.ru/circle есть большая подборка образов геометрии окружности.

### ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИНВЕРСИИ

Основную роль в геометрии окружности играет симметрия. Симметрия между окружностями называется *инверсией*. При этой симметрии точки, лежащие на данной окружности остаются неподвижными точка внутри данной окружности отображается в точку вне ее. Причем чем ближе точка к центру окружности, тем дальше расположен ее образ при инверсии. Образом же центра данной окружности называют бесконечно удаленную точку.

*...геометрия окружности дает строгое основание для законов эстетики...*

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1

Обычно определение инверсии выглядит так: пусть дана окружность $I$ с центром в $O$ и радиусом $R$. Пусть дана произвольная точка $A$. *Образом* точки $A$ при инверсии относительно $I$ называют такую точку $B$, что: $B$ лежит на прямой ($OA$), причем по ту же сторону от $O$, что и $A$; $|OA|*|OB| = R^2$ (или $|OB| = R^2/|OA|$). Легко видеть, что точка $B$ определена однозначно. Если $A$ совпадает с $O$, то $|OA| = 0$ и $|OB|$ – бесконечно велико. В этом случае, как и было сказано, $B$ называют бесконечно удаленной точкой.

Важное свойство инверсии: при ней окружности переходят в окружности (или прямые). Это определение инверсии имеет один недостаток. Оно опирается на понятия «прямая» и «расстояния». Между тем геометрия окружности рассматривает прямые как частный случай окружностей. Есть несколько определений инверсии, основанных только на свойствах окружностей.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2

Пусть $A$, $B$, $C$, $D$ – четыре лежащие на одной окружности точки. Рассмотрим отображение $I$, ставящее в соответствие каждой точке $X$ точку $Y$ по следующему правилу: проведем окружность $O_1$ через $X$, $A$, $B$ и окружность $O_2$ через $X$, $C$, $D$. Окружности $O_1$ и $O_2$ пересекаются в точке $X$. Вторая точка их пересечения $Y$ и будет инверсно сопряжена с $X$, что записывается как $Y = I(X)$. Следует еще указать, что $I(A) = B$, $I(C) = D$, а если окружности $O_1$ и $O_2$ касаются в точке $X$, то $X$ неподвижная точка при этой инверсии: $I(X) = X$. Недостаток этого определения в том, что мы не видим той окружности $I$, относительно которой проводится инверсия. Исправим его в следующем определении.

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3

Пусть дана окружность $I$ и точка $A$ вне ее. Построим точку $B$, инверсно сопряженную с $A$ относительно $I$. Как и ранее, мы обозначим ее $I(A)$. Проведем две какие-нибудь окружности, касающиеся друг друга в точке $A$ и касающиеся $I$ в каких-либо точках $C_1$ и $C_2$. Проведем через точки $A$, $C_1$ и $C_2$ окружность $O_1$. Теперь проведем две другие окружности, касающиеся друг друга в точке и касающиеся $I$. Пусть точки их касания с $I$ $D_1$ и $D_2$ соответственно. Проведем через $A$, $D_1$ и $D_2$ окружность $O_2$. Она пересечется с окружностью $O_1$ в двух точках. Одна из них $A$, вторая же и будет по определению $I(A)$, то есть инверсно сопряженная с $A$ точка относительно $I$.

Мы познакомились с тремя определениями инверсии. То, что эти определения равносильны, мы здесь доказывать не будем.

*Ортогональные окружности и угол между окружностями*

Ортогональные окружности похожи на перпендикулярные прямые. Окружности $A$ и $B$ называются ортогональными, если $A(B) = B$, то есть при инверсии относительно $A$ окружность $B$ переходит в себя. Точки на окружности $B$ при этом подвижны, меняются местами, но не сходят с окружности $B$. Есть и другие определения ортогональных окружностей. Одно пользуется понятием угла между окружностями. Углом между пересекающимися окружностями называют угол между касательными к ним в точке пересечения прямыми (точек пересечения две, но эти углы в точках пересечения равны). Ортогональными называют окружности, угол между которыми равен 90 градусов. Другое определение основано на том, что если окружности $A$, $B$, $C$ касаются друг друга, то окружность $O$, проходящая через точки их касания, ортогональна и $A$ и $B$, и $C$. Но, хватит определений. Пора рассказать, что нам позволяет делать инверсия.

## КОМПОЗИЦИЯ ИНВЕРСИЙ И БАРОЧНЫЕ ФОРМЫ

Пусть у нас есть несколько окружностей, (например четыре) $A$, $B$, $C$, $D$ и точка $X$. Мы можем инвертировать $X$ относительно $A$, получим $A(X)$, затем относительно $B$, получим $B(A(X))$, затем относительно $C$, получим $C(A(B(X)))$ и, наконец, относительно $D$, получив $D(C(A(B(X))))$. Обозначим полученную точку $D(C(A(B(X))))$ как $X_1$. Затем мы можем повторить эту операцию еще раз и еще раз... Получим последовательность точек: $X$, $X_1$, $X_2$, $X_3$... Какое место на плоскости займут эти точки? Иначе говоря, какова будет траектория точки $X$ под действием композиции инверсий относительно четырех данных окружностей $A$, $B$, $C$, $D$? Именно с ответа на этот вопрос начинается геометрическая теория эстетики.

Точка $X$ будет двигаться по спирали. Причем если окружность $A$ мало отличается от $B$, а $C$ от $D$, то это будет почти непрерывное движение, точка $X$ будет постепенно вырисовывать спираль. Это будет необычная спираль: с двумя, а не с одним центром. У одного центра спираль будет раскручиваться, а у другого – закручиваться. Если же $X$ не точка, а окружность, то $X$ будет перемещаться также по спирали, точнее по спирали, имеющей «ширину» (в одних местах у́же, в других толще. Многообразие форм, возникающих из этого спирального движения, завораживает. Они напоминают глаза, раковины, космос, барочные

*Многообразие форм, возникающих из этого спирального движения завораживает...*

украшения, создавая порой причудливые орнаменты. Особенно интересно следить за движением не одной, а нескольких разноцветных окружностей. Примеры (см. рисунки 1–3) приводятся на диске, прилагаемом к журналу.

### КОМПОЗИЦИЯ ИНВЕРСИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ПАРЫ ОКРУЖНОСТЕЙ

Чтобы лучше понять устройство этой спирали, рассмотрим более простой случай. Пусть у нас есть не имеющие общих точек

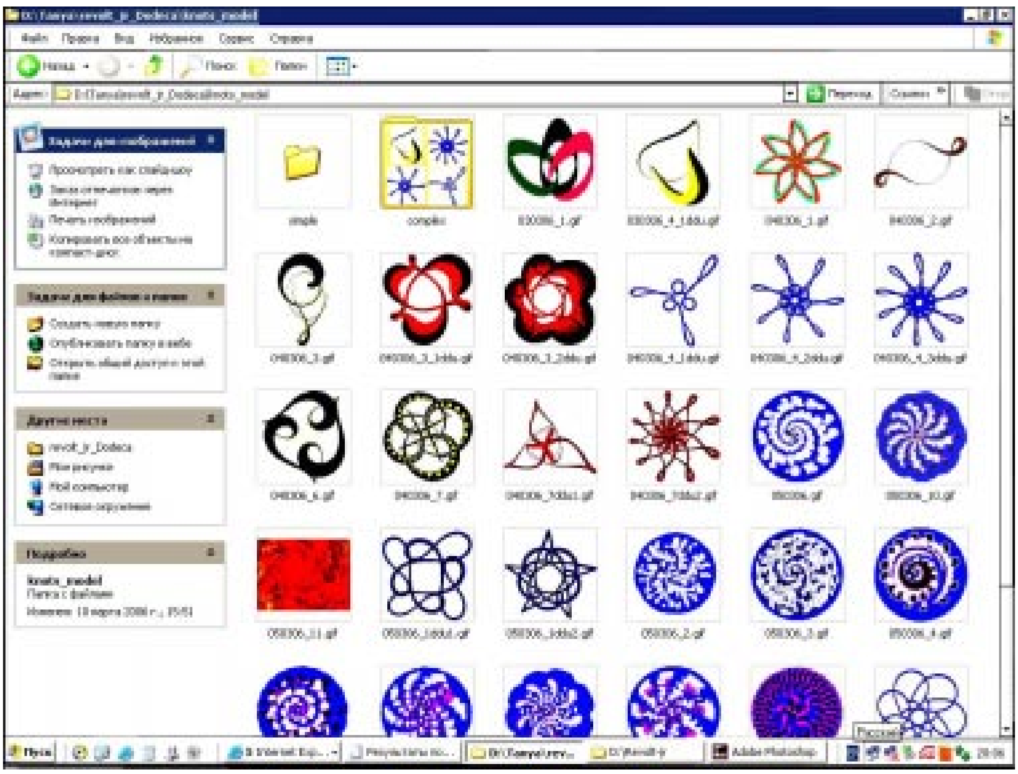


**Рисунок 1.**

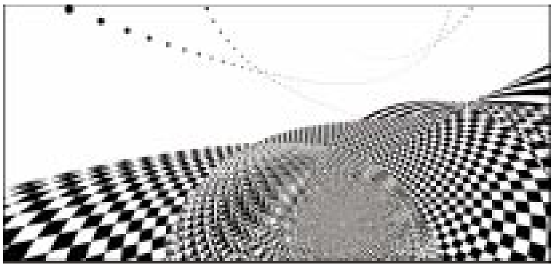


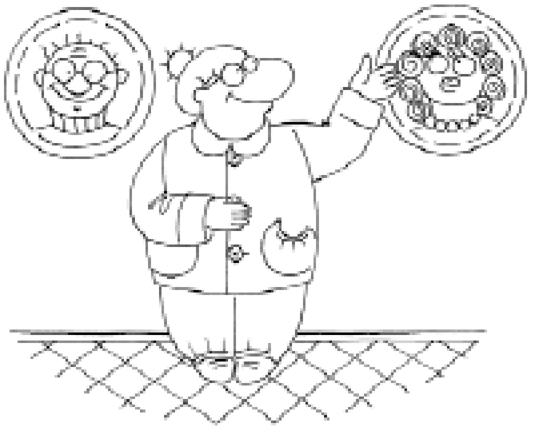
**Рисунок 2.**

окружности $A$ и $B$. Как будет двигаться точка $X$ (или окружность $X$) при многократной композиции инверсий относительно $A$ и $B$? Отразим $A$ относительно $B$, полученное – относительно $A$, полученное – относительно $B$ и так далее. Результат будет сходиться к двум точкам $O_1$ и $O_2$. Причем: $A(O_1) = B(O_1) = O_2$; $B(O_2) = A(O_2) = O_1$; $A(B(O_1) = B(A(O_1) = O_1$; $A(B(O_2) = B(A(O_2) = O_2$. Мы видим, что эти предельные точки неподвижны при действии на них композицией инверсий относительно $A$ и $B$. Назовем $O_1$ и $O_2$ – фокусными центрами пары окружностей $A$ и $B$. Под действием композиции инверсии относительно $A$ и $B$ (обозначают композицию $A*B$, используя тот же знак, что и для умножения), каждая точка плоскости приближается по дуге окружности к одному из этих центров (причем эта окружность ортогональна $A$ и $B$), удаляясь от другого фокусного центра. Точки плоскости «вытягиваются» из одного фокусного центра, «втягиваясь» в другой.

Если $A$ и $B$ пересекаются в двух точках, то под действием $A*B$ точка $X$ будет кружиться по окружности, ортогональной $A$ и $B$. А точки пересечения $A$ и $B$ остаются неподвижными. Если при этом угол между $A$ и $B$ соразмерим с $\pi$ (совпадает с углом какого-либо правильно многоугольника), то $X$ перемещается по множеству из конечного числа точек, лежащих на одной окружности.

Если же $A$ и $B$ касаются друг друга в точке $O$, то траектория движения точки $X$ похожа на оба разобранных случая одновременно. И на оба не похожа! Точка $X$ под действием $A*B$ будет приближаться к точке $O$ (никогда не достигая ее), двигаясь по дуге окружности, ортогональной $A$ и $B$. Все точки плоскости «втягиваются» в точку О. А откуда они вытягиваются? Также из точки О, но с другой стороны!

*Замечание для преподавателя.* Рассматривая инверсии относительно пары окружностей, мы получаем хорошие иллюстрации понятий теории групп: композиция, коммутативность (ортогональные окружности). И также мы получаем превосходные примеры на тему «предел последовательности точек». Причем эти темы (предел и коммутативность) в данном случае тесно связаны друг с другом.



*...получаются ... замечательные образцы декоративного искусства...*

### УСТРОЙСТВО БАРОЧНЫХ СПИРАЛЕЙ

Комбинацией движений первых двух описанных типов и получаются барочные спирали. Пусть пара пересекающихся окружностей $A$ и $B$ ортогональна окружностям $C$ и $D$. В этом случае $C$ и $D$ не могут иметь между собой общих точек (не могут касаться или пересекаться, опять-таки, доказывать это здесь мы не будем). Тогда траектория движения точки $X$ под действием композиции $A*B*C*D$ есть спираль, причем:

1. Спираль закручивается вокруг одной точки пересечения $A$ и $B$ и раскручивается относительно другой. У этих спиралей – два (!) центра!

2. Чем больше угол между $A$ и $B$, тем быстрей спираль крутится. Чем дальше друг от друга $C$ и $D$, тем быстрей точки втягиваются в один центр спирали и вытягиваются из другого.

3. Точки пересечения $A$ и $B$ обязательно являются также фокусными центрами

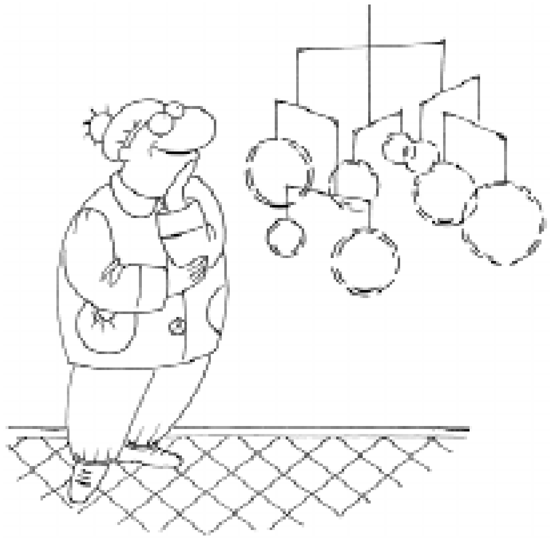
окружностей $C$ и $B$. (Это следует из того, что $A$ и $B$ ортогональны $C$ и $D$).

Я объяснил построение барочных, двухцентровых спиралей, одного из важнейших объектов геометрии окружности. Сальвадор Дали называл подобные спирали «носорожьими рогами» и считал основой живописи и даже мироздания.

Обычные графические редакторы не позволяют работать с геометрией окружности, Я написал макросы к CorelDraw, с помощью которых создание таких спиралей становится минутным делом. Они красивы сами по себе, а если использовать разноцветные окружности или круги, симметрично отражать и сочетать полученное между собой, то получаются зооморфные и даже антропоморфные формы или замечательные образцы декоративного искусства. На диске, приложенном к журналу, есть программа DodecaLook, позволяющая наблюдать эти спирали в динамике.

## ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ ДОДЕКА-АРТ

Образы, полученные на основании геометрии окружности, я называю «Додека-арт», или «ddu-арт» (так как файлы, в которых



*Каждый образ возникает в движении...*

хранятся исходные данные для них имеют расширение *.ddu.) Сейчас я очерчу основные принципы построения этих образов.

## ДИНАМИЗМ

Первый и самый важный – это «динамизм». Каждый образ возникает в движении. Исходные объекты: точки, окружности, линии, квадраты, какие угодно фигуры подвергаются многократным преобразованиям, основанным на инверсии. Мы видим

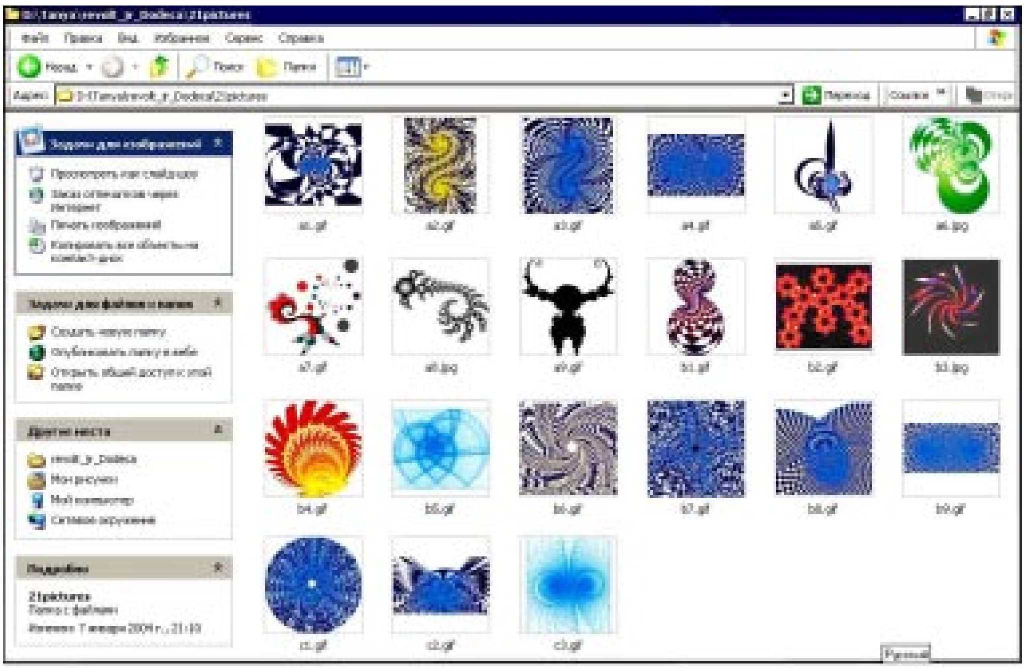


**Рисунок 3.**

постепенно возникающую траекторию движения этих фигур.

### ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИЛИ РЕКУРСИЯ

Второй принцип объясняет преобразования, действующие на движущиеся фигуры. Я называю этот принцип «принципом взаимодействия» или «принципом рекурсии». Его проще понять, считая, что движутся не какие-то фигуры, а именно окружности. Принцип взаимодействия гласит, что положение каждой движущейся окружности есть результат композиции инверсий относительно некоторых других движущихся окружностей. В математике подобные зависимости называются рекурсивными. Зная положение окружностей в стартовый момент времени, мы можем определить их положение в следующий момент времени. Это аналогично действию так называемых «клеточных автоматов».

### ИЕРАРХИЯ

Третий принцип я называю «принципом иерархии». Принцип взаимодействия охватывает множество различных движений. Часто, зная рекурсивную зависимость, не просто предсказать получающиеся траектории. Хотя бы их основные свойства. Поэтому для построения узлов, орнаментов или, например, моделирования движения планет, удобно использовать не все возможные рекурсивные зависимости, а только особые, удовлетворяющие принципу иерархии.

*...из хаоса линий возникает причудливый узор...*

Принцип предполагает, что во взаимодействии окружностей между собой есть иерархическая структура. Поясним на примере движения планет в солнечной системе. Будем считать, что Солнце неподвижно, а Земля вращается вокруг Солнца. Назовем систему «Солнце-Земля» системой с уровнем иерархии 1. Луна вращается вокруг Земли (испытывая также притяжение Солнца). Назовем систему «Солнце-Земля-Луна» системой с уровнем иерархии 2. Если бы у Луны был свой спутник, то система «Солнце-Земля-Луна-Спутник» называлась бы системой с уровнем иерархии 3. Аналогично определяется «система с уровнем иерархии $N$».

Такие иерархические системы можно легко реализовать в геометрии окружности с помощью рекурсивных зависимостей. Большая часть демонстрируемых DodecaLook образов использует принцип иерархии.

### НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОБРАЗОВ ДОДЕКА-АРТ

В предыдущем разделе были сформулированы основные принципы, формирующие Додека-арт. Укажу на важнейшие, на мой взгляд, наглядные свойства возникающих рисунков.

### ПОРЯДОК, ХАОС, ЭВОЛЮЦИЯ

Если вы запустите программу DodecaLook и откроете какой-то файл *.ddu, то часто увидите несколько разноцветных окружностей (или кругов) двигающихся по экрану, образуя какую-то причудливую загогулину. Посмотрев на нее несколько секунд, вы можете перейти к следующему файлу. Не торопитесь! Возможно, вы пропускаете самое интересное – эволюцию образа. По мере того, как следы окружностей накапливаются на экране, закрашивая белые области, из хаоса линий возникает причудливый *узор*, часто напоминающий гравюры Эшера. Если окружности движутся по замкнутой линии (узлу, точнее, – его проекции на плоскость), то в перекрестье узла возникают причудливые маленькие картинки. Они похожи друг на друга, но отличаются. С течением времени эти фигурки изменяются, потом обычно превращаются в хаос, потом снова возникают.

Если движутся круги, то порядок появляется быстрее, и быстрее один сменяется другим, сохраняя лишь присущую всему образу симметрию. Обычно такие образы менее утонченные, чем возникающие из окружностей, зато мы быстрее видим возникновение необычных орнаментов.

### СТАБИЛИЗАЦИЯ

Когда происходит какое-то движение, всегда интересно: будет ли оно периодическим? Закончится ли оно, стабилизируется ли образ? Периодические движения возникают в Додека-арт, если окружности двигаются по замкнутой линии. Но, поскольку рисунок получается накоплением, как след движения всех окружностей, то периодичность движения не означает еще периодического повторения возникающего рисунка. Это происходит редко.

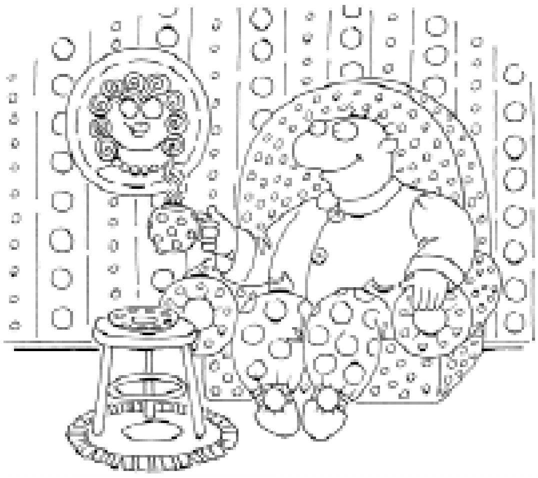
Движение прекращается, если окружности уходят куда-то далеко или стягиваются в точки. Первое я исключаю подбором формул. Второе случается. Интересный пример дает файл triada: нарисовав за первые секунды приятную самопересекающуюся линию с тройственной симметрией (тут некоторые пользователи решают, что им все ясно и переходят к следующему, пропуская самое интересное), окружности начинают двигаться с чуть заметными изменениями. Образ распространяется по всему экрану, образуя уже не линию, а целое полотно, но также с тройственной симметрией. Картина эволюционирует несколько часов, существенно изменяясь примерно каждые 10 минут и в конце-концов застывает: окружности стягиваются в точки. Правда, эти точки продолжают движение, но это не меняет уже существенно изображение. Художники говорили мне, что в ходе эволюции образ демонстрирует разные живописные или гравюрные техники.

### ТРЕХМЕРНОСТЬ

Хотя все преобразования окружностей происходят на одной плоскости и они никуда с нее не уходят, многие образы воспринимаются как трехмерные. Это заметно, даже когда по барочным спиралям движется несколько разноцветных кругов – порой мы воспринимаем это как движение вниз и вверх, а не только вправо и влево, вперед или назад. В более сложных случаях это еще наглядней. DodecaLook показывает узлы, то есть очевидно пространственную форму. Более того, некоторые формы воспринимаются нами как нечто не вкладываемое и в трехмерное пространство, напоминая бутылку Клейна. По отзывам пользователей, программа помогает развивать пространственное воображение.

### ЗООМОРФНОСТЬ И АНТРОПОМОРФНОСТЬ

Самое удивительное, на мой взгляд, что образы, получаемые в Додека-арт порой напоминают каких-то животных или человеческие фигуры и лица. Конечно, в таком утверждении много субъективного, как во всяком сходстве. Но, тем не менее, попробуйте вглядеться в них пристально. А ведь созданы эти образы исключительно на основании математических соображений, и задачи «нарисовать человечка» не ставилось. Поэтому я выдвигаю гипотезу: строение одушевленного мира основано на геометрии окружности.



*...строение одушевленного мира основано на геометрии окружности.*

## УЗЛЫ, ОРНАМЕНТЫ И ПЛАНЕТЫ

### ПОСТРОЕНИЕ УЗЛОВ В ПРОГРАММЕ DODECALOOK

Откройте программу. В правой части на панели внизу экрана есть кнопка Knots, а за ней – три окошечка, куда можно вводить целые числа. Если вы там ничего не меняли, в окошечках стоят единички. Этим нужно пользоваться для построения узлов. Я уже писал о принципе иерархии. Простые, но красивые узлы возникают при уровне иерархии 2, более изысканные и сложные при уровне иерархии 3. Каждому уровню иерархии соответствует одно окошечко (работа с системой уровня иерархии 4 и более не предусмотрена).

Загрузим, например, файл 030306.ddu (см. диск к журналу). Нажмем кнопку Go два (или один) раза. На экране образуется красивый завиток. Этот завиток – основа для будущего узла. Теперь введем во второе окошечко цифру, например 5 (а можно и 3, и 4, и 6). Заметим, что третье, самое правое окошечко в этой секции (перед кнопкой Zoom) «заморожено», в него нельзя ничего ввести. Это потому, что узел из файла 030306.ddu имеет уровень иерархии 2, а замороженное окошечко управляет уровнем иерархии 3. Такого уровня в этом узле нет, программа это определяет и не дает с ним работать.

Теперь снова загрузим файл 030306.ddu (после изменения цифр в окошечках лучше производить перезагрузку) и нажмем кнопку Knots (именно этой кнопкой, а не кнопкой Go запускаются узлы, когда мы их модифицируем). Мы увидим пятичленный узел, напоминающий пятиконечную звезду. Пять вершин звезды можно обходить в разном порядке. Чтобы изменять этот порядок надо пользоваться первым, самым левым, сразу после кнопки Knots окошком, введя в него натуральное число, например 3. Теперь снова проведем перезагрузку: загрузим тот же файл 030306.ddu и щелкнем один раз на Knots. Мы снова увидим пятичленный узел, напоминающий звезду, но вершины звезды проходятся в другом порядке. Если щелкнуть несколько раз по кнопке Brush+, то узел рисуется «более интенсивно».

Вы можете открывать уже готовые образцы (часто в имени файла узла присутствуют его параметры) и модифицировать их по этой схеме. Узлы трех уровней иерархии хранятся в папке Complex. Вы можете просто ставить в три окошка небольшие целые числа и получать сложные, уже не звездовидные узлы. Только прежде чем что-то менять в окошечках, советую просмотреть уже имеющийся узел.

### ОРНАМЕНТЫ И ПЛАНЕТЫ

Если мы поставим во второе окошечко большое число, хотя бы двузначное, то узел будет напоминать звезду с большим числом вершин. Поэтому отдельные линии узла сольются, и он будет напоминать уже не узел, а необычный орнамент. Орнамент будет изменяться, как об этом было сказано раньше в разделе «порядок, хаос, эволюция». Довольно неожиданно узнать, что один из простейших способов получить нетривиальный орнамент – это рассмотреть проекцию трехмерного узла на плоскость.

Загрузим теперь файл 261004_Planets.ddu. Нажмем кнопку Go (пощелкайте ее, чтобы увидеть движение без «следов»). На экране будет желтое «солнце» в центре и «планеты», кружащиеся внутри него. А у зеленой планеты будет спутник светло-зеленого цвета. При этом центры планет двигаются по эллипсам, как и должно быть по законам небесной механики. Последнее автоматически обеспечивается геометрией окружности (см. раздел о движении окружности при композиции инверсии относительно двух пересекающихся окружностей). Если теперь еще раз щелкнуть Go будут видны траектории: светло-зеленая лиана спутника будет закручиваться вокруг темно-зеленой линии планеты.

### КАК ПОЛЬЗОВАТЬСЯ ПРОГРАММОЙ DODECALOOK

Это очень просто. Откройте программу (щелкнув по ее значку) и щелкните кнопку Load. Выберите файл *.ddu (программа и файлы находятся на диске к журналу). Затем щелкните кнопку «Go». Окружности начнут двигаться по траектории. Щелкните еще раз на кнопку «Go» – будет виден весь «след» движения окружности. Если еще раз щелкнуть на «Go» – след исчезнет, снова щелкнуть – появится и т. д.

Если щелкать по кнопке «stop» – изображение останавливается и затем движется пошагово. Щелкая по кнопке «brush+», мы наращиваем кисть, изображение рисуется более мощно (движется большее число окружностей), но движутся они чуть медленней. Кнопка «Fill» превращает круги (если они есть) в окружности. Четыре окошечка после слова «mode» меняют движущиеся объекты. Пока отмечено только левое окошко – двигаются окружности, если поставить галки в трех остальных, будут двигаться еще и квадраты, вертикальные и горизонтальные линии. Щелкнув по выбранному окошку еще раз, мы снимаем его выбор, галочка в нем исчезает, и связанная с этим окошком фигура не движется. В окошке «width» можно написать целое число, чем оно больше: тем толще будет двигающаяся окружность.

После кнопки «knots» стоят три окошечка. Они нужны для построения узлов и демонстрации принципа иерархии. Как пользоваться ими, было рассказано в разделе про узлы. Кнопка «save» позволяет сохранить объекты, если вы их обрабатывали. Результат сохранения – новый файл *.ddu.

Очень удобна кнопка «Zoom». Нажав на нее, вы видите только рисунок: все остальное с экрана исчезает. Теперь, нажимая пробел, можно смотреть изображение пошагово. Нажав на клавиатуре букву Z (обратите внимание, у вас должен быть выставлен английский язык, это должна быть буква Z, а не русская Я), вы снова увидите непрерывное движение. Этот режим работы нравится детям. Они щелкают на Z и пробел и веселятся от метаморфоз рисунка. Чтобы вернуться из режима «Zoom» в обычный, щелкните дважды мышью.

Объяснение некоторых функций программы опущено, чтобы не «запутывать» читателей.

***Пименов Револьт Револьтович, программист.***